ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA

POR M. CLAIRAUT

DA ACADEMIA REAL
DAS SCIENCIAS DE PARÍS,
E DA SOCIEDADE REAL
DE LONDRES

TRADUZIDOS NA LINGUA PORTUGUEZA
POR
JOAQUIM CARNEIRO DA SILVA.

LISBOA
NA REGIA OFFICINA TYPOGRAFICA

ANNO MDCCLXXII.

Com licença da Real Meza Censoria.

AO ILLUSTRISSIMO,
E
EXCELLENTISSIMO SENHOR

SEBASTIÃO JOSÉ
DE CARVALHO E MELLO,
MARQUEZ DE POMBAL,

PRIMEIRO MINISTRO,
E SECRETARIO DE ESTADO
DE S. MAGESTADE FIDELISSIMA,
&c. &c. &c.

OFFEREÇO a V. EXCELLENCIA a versão dos Elementos de Geometria do célebre

Clairaut, animado do desejo de dar alguma demonstração pública da veneração respeitosa, que a V. EXCELLENCIA conservo, e de procurar-lhe por meio deste reverente obsequio a respeitavel protecção de V. EXCELLENCIA, para que este meu trabalho mereça em Portugal a mesma estimação, que teve na França pelo novo, e excellente methodo, com que o Author tratou esta materia.

São as Artes, e Sciencias devedoras a V. EXCELLENCIA da gloria, que do seu conhecido augmento lhes resulta, procurando V. EXCELLENCIA com incessante cuidado todos os meios, que podem contribuir para os seus progressos, e consequentemente para o bem geral. Sendo justissimo por este

te

te motivo, que a V. EXCELLENCIA se dedique hum Tratado, que facilita os principios daquellas mesmas Artes, e Sciencias, de que V. EXCELLENCIA he Illustre Protector; e dignando-se V. EXCELLENCIA aceitallo com aquella complacencia, que lhe he natural, se completará o objecto da minha ambição, tendo a prerogativa de concorrer para levar até á posteridade mais remota o rendimento, que as Artes, e Sciencias devem ao seu Mecenas, a bondade, com que V. EXCELLENCIA me honra, e a sinceridade do meu reconhecimento.

EXCELLENTISSIMO SENHOR

Beija a mão de V. Excellencia

Seu mais reverente criado

Joaquim Carneiro da Silva.

DO EDITOR.

O Precisarem alguns sogeitos de aprender a Geometria por hum methodo, que não lhes roubando grande parte do tempo, que para outro estudo necessitam, lhes désse algum conhecimento della, foi o principal motivo de se fazer a traducção dos Elementos de Geometria de Mr. Clairaut. Feita pois a versão, se resolveo o publicar-se, entendendo-se que se facilitava a algumas pessoas, que quizessem aprender a Geometria, o meio de se instruirem nesta Sciencia; que todos sabem deve este estudo preceder ao de muitas outras, que della dependem. O novo, e excellente

me-

methodo de Mr. Clairaut he digno da attenção dos que ſe deſtinão ao eſtudo da Geometria ; pois entre os Authores, que tratáram deſta materia, eſte he o que com mais brevidade, e mais perceptivelmente nos moſtrou quanto ha de eſſencial na Geometria Elementar. Quanto ao aſſeio da edição ſe fez o poſſivel, para que tambem neſta parte foſſe digna da eſtimação dos Leitores, e da materia, de que ella trata.

PRO-

PROLOGO.

AINDA que a Geometria ſeja abſtracta em ſi meſma, devemos não obſtante conceder que as difficuldades, que encontram aquelles, que a ella ſe principiam a applicar, provém as mais das vezes do modo, com que eſta ſe enſina nos Elementos ordinarios. Nelles ſe principia ſempre por hum grande numero de definições, de poſtulados, de axiomas, e de principios preliminares, que parece não promettem ſenão couſas ſeccas ao Leitor. As propoſições, que depois ſe ſeguem, não fixando o eſpirito ſobre objectos mais intereſſantes, ſendo por outra parte difficeis de ſe concebe-

rem,

rem, ordinariamente ſuccede que os Principiantes ſe fatigam, e deſanimam antes de terem alguma idéa diſtincta do que ſe lhes quer enſinar.

He verdade que por evitar eſta ſequidão, naturalmente unida ao eſtudo da Geometria, cuidáram alguns Anthores em moſtrar, depois de cada propoſição eſſencial, o uſo, que della ſe podia fazer na prática; porém com iſto provam a utilidade da Geometria, ſem facilitarem muito os meios de ſe aprender; porque vindo ſempre as propoſições antes do ſeu uſo, o eſpirito não encontra idéas ſenſiveis, ſenão depois de ter ſoffrido o trabalho de paſſar pelas idéas abſtractas.

Al-

Algumas reflexões, que fiz ſobre a origem da Geometria, me deram a eſperança de poder evitar eſtes inconvenientes, com reunir as duas ventagens de intereſſar, e illuminar os Principiantes. Penſei que aſſim eſta, como todas as mais ſciencias, ſe deviam ter formado por gráos; que veriſimilmente alguma preciſão tinha ſido a que lhe tinha feito dar os primeiros paſſos, e que eſtes ſe não podiam dar fóra da capacidade dos Principiantes, pois que eram Principiantes aquelles, que os tinham dado.

Prevenido deſta idéa, propuz comigo de remontar ao que podia ter dado naſcimento á Geometria, e cuidei em moſtrar os

ſeus

ſeus principios por hum methodo baſtantemente natural, para ſe poder ſuppôr ſer o meſmo, de que uſáram os primeiros Inventores, procurando ſempre de evitar todas as falſas tentativas, que elles neceſſariamente fariam.

A medição dos Terrenos me pareceo ſer o mais proprio que havia para dar naſcimento ás primeiras propoſições da Geometria, o que com effeito he a origem deſta Sciencia, pois que Geometria ſignifica *medição de Terreno.* Pretendem alguns Authores, que vendo os Egypcios continuadamente os limites das ſuas heranças deſtruidos pelas inundações do Nilo, deitáram os primeiros fundamentos da Geometria, procuranrando os meios de ſe ſegurarem exactamente das ſituações, da extensão, e da figura dos ſeus dominios. Porém quando não nos conformaſſemos com eſtes Authores, ao menos não ſe poderá duvidar que deſde os primeiros tempos os homens não procuraſſem methodos para medir, e repartir as ſuas Terras. Querendo depois aperfeiçoar eſtes methodos, as inveſtigações particulares os conduzíram pouco a pouco a inveſtigações geraes; e tendo comſigo propoſto de ſaber a relação exacta entre toda a ſorte de grandezas, formáram huma Sciencia de hum objecto muito mais vaſto, do que aquelle, que no principio tinham abraçado, á qual não obſtante

con-

conſerváram o nome, que lhe tinham dado na ſua origem.

A fim de ſeguir neſta Obra hum caminho ſemelhante ao dos Inventores, applico-me primeiramente a fazer deſcubrir aos Principiantes os principios, de que póde depender a ſimples medição dos Terrenos, e das diſtancias acceſſiveis, e inacceſſiveis, &c. dalli paſſo a outras inveſtigações, que tem tal analogia com as primeiras, que a curioſidade, que he natural a todos os homens, os conduz a deterem-ſe nellas; e juſtificando depois eſta curioſidade com algumas applicações uteis, venho a fazellos diſcorrer por quanto ha de intereſſante na Geometria elementar.

Pa-

Parece-me que não haverá dúvida ſobre ſer eſte methodo ao menos proprio para excitar aquelles, que poderáõ eſtar deſanimados com as verdades ſeccas da Geometria, ſem ſerem applicadas a couſa alguma; antes eſpero qne nelle haverá tambem huma utilidade ainda mais importante, que he o coſtumar o eſpirito a procurar, e a deſcubrir, porque eu evito cuidadoſamente de dar alguma propoſição debaixo da fórma de theoremas, iſto he, daquellas propoſições, onde ſe demonſtra que eſta, ou aquella verdade o he, ſem moſtrar como ella ſe veio a deſcubrir.

Se os primeiros Authores das Mathematicas apreſentáram os ſeus

deſ-

deſcubrimentos com theoremas, foi ſem dúvida para darem hum ar mais maravilhoſo ás ſuas producções, ou por evitar o trabalho de tornarem a ſeguir as idéas, que nos ſeus deſcubrimentos os tinham conduzido. Seja o que for, pareceo-me muito mais a propoſito o occupar continuadamente os meus Leitores a reſolver Problemas, iſto he, a procurar os meios de fazer alguma operação, ou a deſcubrir alguma verdade incognita, determinando a relação que ha entre as grandezas dadas, e as grandezas deſconhecidas, que ſe querem achar. Seguindo os Principiantes eſte caminho, percebem a cada paſſo, que ſe lhes faz dar, a razão, pela qual ſe conduz o

In-

Inventor, e aſſim podem mais facilmente adquirir o eſpirito de invenção.

Talvez ſe me notará em alguns lugares deſtes Elementos de me ſujeitar demaziadamente ao que os olhos me fazem ver, e de não ſeguir baſtantemente a exacção rigoroſa das demonſtrações. Peço aos que ſobre iſto me poderiam criticar, queiram obſervar, que eu não paſſo levemente ſenão as propoſições, cuja verdade ſe deſcobre, por pouco que nellas ſe faça reflexão. Uſo deſte modo maiormente nos principios, onde ſe encontram mais a miudo as propoſições deſte genero; porque tenho notado, que aquelles, que tinham diſpoſição para a Geometria, faziam goſto de exercitar alguma couſa o ſeu eſpirito; e que pelo contrario ſe deſanimavam, quando eram opprimidos com demonſtrações, por aſſim dizer, inuteis.

Tome Euclides o trabalho de demonſtrar, que dous circulos, que ſe cortam, não tem ambos o meſmo centro; que hum triangulo comprehendido em outro, tem a ſomma dos ſeus lados menor do que a dos lados do triangulo, em que elle eſtá comprehendido, que diſto nos não admiraremos. Eſte Geometra tinha para convencer a Sofiſtas obſtinados, que punham a ſua gloria em negar as mais evidentes verdades: era pois preciſo que naquelle tempo tiveſſe a Geomemetria , como tem a Logica , o ſoccorro dos raciocinios em fórma para tapar a boca a quem a quizeſſe contrariar. Porém as couſas mudáram de face. Todo o diſcurſo, que ſe faz ſobre aquillo, que a boa razão por ſi ſó anticipadamente decide , ſe tem hoje por pura perda, e não he proprio ſenão para obſcurecer a verdade, e deſgoſtar os Leitores.

Outra couſa, que ſe me poderia notar, ſería o ter eu omittido differentes propoſições , que acham lugar nos Elementos ordinarios; e de me contentar, quando trato das proporções, de dar ſómente os principios fundamentaes dellas.

Ao que reſpondo, que neſte

Tratado ſe acha tudo o que he neceſſario para completar o meu projecto; que as propoſições, que eu omitto, são aquellas, que não podem ſer de alguma utilidade por ſi meſmas; e além diſto não contribuiriam para facilitar a intelligencia daquellas, de que importa ſer inſtruido; que a reſpeito das proporções o que eu dellas digo he ſufficiente para dar a entender as propoſições elementares, que as ſuppõem. He eſta huma materia, de que tratarei fundamentalmente nos Elementos de Algebra, que depois publicarei.

Em fim, tendo eu eſcolhido a medição dos Terrenos para intereſſar os Principiantes, não devo temer que alguns confundam

eſ-

eſtes Elementos com os Tratados ordinarios de Medição? Eſte penſamento ſó o podem ter aquelles, que não conſiderarem que a medição dos Terrenos não he o verdadeiro objecto deſte Livro; porém que ella me ſerve ſómente de motivo para fazer deſcubrir as principaes verdades Geometricas. Eu podia da meſma ſorte remontar a eſſas verdades, fazendo a Hiſtoria da Fyſica, da Aſtronomia, ou de qualquer outra parte das Mathematicas, que eu quizeſſe eſcolher; porém então a multiplicidade de idéas eſtranhas, nas quaes sería neceſſario occupar-ſe, teria como ſoffocado as idéas Geometricas, nas quaes eu ſómente devia fixar o eſpirito do Leitor.

ELE-

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE PRIMEIRA.

Dos meios, de que era mais natural ſe uſaſſe, para ſe chegar á medição dos Terrenos.

O Que parece que primeiramente ſe mediria, são os comprimentos, e as diſtancias.

I.

Para ſe medir qualquer comprimento que ſeja, o expediente, que nos ſubminiſtra huma ſorte de Geometria natural, he o de comparar o com-

comprimento de huma medida conhecida com a medida do comprimento, que ſe quer ſaber.

II.

A linha recta he a mais curta que ha de hum ponto a outro, e por conſequencia he a medida da diſtancia entre dous pōtos.

A reſpeito da diſtancia, vemos que para ſe medir aquella, que ha entre dous pontos, he neceſſario tirar huma linha recta de hum a outro ponto, e que ſobre eſta recta he que ſe preciſa trazer a medida conhecida; porque todas as outras linhas, tendo neceſſariamente algum deſvio maior, ou menor, são mais compridas do que a linha recta, que não tem deſvio algum.

III.

EST. I.

Além da neceſſidade de medir a diſtancia de hum ponto a outro, ſuccede muitas vezes que ſomos tambem obrigados a medir a diſtancia de hum ponto a huma linha. Hum homem, por exemplo, poſto na margem de hum rio em D, (Eſtampa I.

Fi-

Figura 1.) quer ſaber a diſtancia que ha do lugar, em que elle eſtá, á outra margem oppoſta AB. Bem ſe vê que neſte caſo, para medir a diſtancia que ſe quer, he preciſo tomar a mais curta de todas as linhas rectas DA, DB, &c. que ſe podem tirar do ponto D ſobre a recta AB. Ora he facil de ver, que eſta linha a mais curta, de que preciſamos, he a linha DC, que ſuppomos não pender nem para a parte de A, nem para a de B. Sobre eſta linha pois, á qual ſe deo o nome de perpendicular, he que ſe preciſa trazer a medida conhecida para podermos ter a diſtancia DC, que ha entre o ponto D, e a recta AB. Mas tambem vemos, que para ſe pôr eſta medida ſobre a linha DC, he preciſo que eſta linha ſe tire antes de tudo: logo era neceſſario que houveſſe hum methodo para traçar perpendiculares.

EST. I.

Huma linha, que cahe ſobre outra, ſem pender ſobre ella para alguma parte, he perpendicular a eſta linha.

IV.

Havia tambem preciſão de as tra-

EST. I. traçar em huma infinidade de outras occasiões. Sabe-se, por exemplo, que a regularidade de figuras taes, como ABCD, FGHI, (Fig. 2. e 3.) chamadas rectangulos, compostas de quatro lados perpendiculares huns aos outros, obriga a dar as suas fórmas ás casas, aos seus interiores, aos jardins, ás salas, á cantaria das muralhas, &c.

O rectangulo he huma figura de quatro lados perpendiculares huns aos outros.

A primeira ABCD destas figuras, cujos quatro lados são iguaes, chama-se commummente quadrado. A outra FGHI, que sómente tem os lados oppostos iguaes, tem o nome de rectangulo.

O quadrado he hum rectangulo, que tem os quatro lados iguaes.

V.

Nas differentes operações, que pedem que se tirem perpendiculares, se trata ou de as abaixar sobre huma linha de hum ponto tomado fóra della, ou de as levantar de hum ponto posto sobre a mesma linha.

Se do ponto C, (Fig. 4.) tomado

do na linha AB, ſe quizer levantar a linha CD perpendicular a AB, ſerá neceſſario que eſta linha não penda para A, nem para B.

EST. I. Modo de levantar huma perpendicular.

Suppondo-ſe pois que C eſteja igualmente diſtante de A, e de B, e que a recta CD não penda para alguma parte, claro eſtá que cada hum dos pontos deſta linha eſtará igualmente diſtante de A, como de B; aſſim não faltará mais do que procurar hum ponto qualquer como D, de ſorte que eſteja em igual diſtancia de A, e de B; porque conduzindo pelo ponto C, e por eſte ponto D huma linha recta CD, ſerá eſta a perpendicular pedida.

Para ſe achar o ponto D, talvez que por tentativas ſe conſeguiſſe; porém eſte modo não ſatisfaz o eſpirito, elle quer hum methodo, que o illumine. Ei-lo aqui.

Tomareis huma medida commua, huma corda, por exemplo, ou hum compaſſo com huma abertura determi-

EST. I. minada, ſegundo o em que vós trabalhardes, ou ſobre terreno, ou ſobre papel.

Tomada eſta medida, fixareis no ponto A a extremidade da corda, ou a ponta do compaſſo; e fazendo gyrar a outra ponta, ou a extremidade da corda, traçareis o arco PDM. (Fig. 5.) Depois, ſem mudar de medida, obrareis da meſma ſorte reſpeito ao ponto B, e deſcrevereis o arco QDN, o qual cortando o primeiro arco em D, dará o ponto procurado.

Porque o ponto D pertencerá igualmente aos dous arcos PDM, QDN deſcritos por meio de huma medida commua, a ſua diſtancia ao ponto A ſerá igual á que ha ao ponto B. Aſſim CD não penderá para A, nem para B: logo eſta linha ſerá perpendicular ſobre AB.

Se o ponto C ſe não achar em igual diſtancia de A, e de B, ſerá neceſſario tomar outros dous pontos

a,

a, e *b* igualmente diſtantes de C, e ſervir-vos delles em lugar de A, e de B, para deſcrever os arcos PDM, QDN. EST. I.

VI.

Se hum dos traços PDM for continuado por O, E, R, &c. (Fig. 4.) até que venha ao meſmo ponto P, eſte gyro inteiro ſe chamará circumferencia do circulo, ou ſimplesmente circulo.

O circulo he o traço inteiro, que deſcreve a ponta movel de hum cõpaſſo, gyrando á roda da outra ponta.

Traçando-ſe ſómente huma parte PDM da circumferencia, eſta parte ſe chamará arco de circulo.

O ponto fixo A ſeu centro, ou centro do circulo.

O centro he o lugar da ponta fixa.

E o intervallo AD o ſeu radio.

Toda a linha, como DAE, que paſſa pelo centro A, e que ſe termina na circumferencia, chama-ſe diametro; he evidente que eſta linha he dupla do radio, donde vem que o radio ſe chama ás vezes ſemidiametro.

O radio he o intervallo das pontas do compaſſo.

O diametro he o dobro do radio.

EST. I.

VII.

Modo de abaixar huma perpendicular.

O modo de levantar huma perpendicular de huma linha AB (Fig. 6.) nos enſina o de abaixar ſobre ella huma perpendicular de qualquer ponto E, tomado fóra da meſma linha; porque pondo em E a extremidade de hum fio, ou a ponta do compaſſo, e com o meſmo intervallo E *b* ſinalando dous pontos *a*, e *b* ſobre a linha AB, ſe procurará, como no Artigo precedente, outro ponto D, a diſtancia do qual ao ponto *a*, e ao ponto *b* ſeja a meſma; e por eſte ponto D, e pelo ponto E ſe tirará a recta DE, que tendo cada huma das ſuas extremidades igualmente diſtantes de *a*, e de *b*, e não pendendo mais para hum deſtes pontos do que para o outro, ſerá perpendicular ſobre AB.

VIII.

Da operação precedente ſe ſegue a ſolução de hum novo Problema.

Tra-

Tratando-ſe de dividir huma linha recta AB (Fig. 7.) em duas partes iguaes; dos pontos A, e B, tomados como centros, e com qualquer abertura de compaſſo, ſe deſcrevam os arcos REI, GEF, e depois dos meſmos centros, e com a meſma, ou qualquer outra abertura que ſe queira, ſe deſcrevam tambem os arcos PDM, QDN; e então a linha ED, que paſſará pelos pontos das secções E, e D, dividirá AB em duas partes iguaes no ponto C. EST. I. Cortar huma linha em duas partes iguaes.

IX.

Tendo-ſe achado o modo de traçar as perpendiculares, nada era mais facil do que ſervir-ſe delle para conſtruir as figuras chamadas rectangulos, das quaes ſe fallou no Artigo IV. Bem ſe vê, que para conſtruir hum quadrado ABCD, (Fig. 2.) que tenha os lados iguaes á linha dada K, he preciſo tomar ſobre a linha GE hum intervallo AB, Conſtruir hum quadrado ſobre hũ lado dado.

EST. I. AB, igual a K, depois levantar (Artigo V.) dos pontos A, e B as perpendiculares AD, BC, que ſeja cada huma igual a K, e depois tirar DC.

X.

Fazer hum rectangulo, do qual ſejam dados o comprimento, e a largura.

Querendo-ſe traçar hum rectangulo FGHI, (Fig. 3.) cujo comprimento foſſe K, e a largura L, farſe-hia FG igual a K, depois ſe levantariam as perpendiculares FI, e GH cada huma igual a L, e depois ſe tiraria HI.

XI.

As parallelas são linhas ſempre igualmente diſtantes humas das outras.

Na conſtrucção das obras, como parapeitos, canaes, ruas, &c. he neceſſario tirar linhas parallelas, iſto he, linhas a poſição das quaes ſeja tal, que os ſeus intervallos tenham por toda a parte por medida perpendiculares do meſmo comprimento. Ora para tirar eſtas parallelas, parece-me que não ha couſa mais natural, do que recorrer ao methodo, de que nos ſervimos para traçar

çar rectangulos. Seja AB, (Fig. 8.) EST. I. por exemplo, hum dos lados de hum canal, ou de hum parapeito, &c. ao qual se quizesse dar a largura CA; ou, por exprimir a questão de outro modo mais geometrico, e mais geral, supponhamos que se queira conduzir por C a parallela CD a AB: tomar-se-ha á vontade hum ponto, como B, na linha AB, e se obrará do mesmo modo que se faria, se tendo a base AB, se quizesse fazer hum rectangulo ABCD, que tivesse AC por altura. Então as linhas CD, AB, se fossem infinitamente produzidas, seriam sempre parallelas, ou, que vem a ser o mesmo, nunca se encontrariam.

Tirar huma parallela a huma linha por hum ponto dado.

XII.

Pondo-se a regularidade das figuras rectangulares muitas vezes em execução, como dissemos, ha muitos casos, em que he necessario saber a sua extensão. Tratar-se-ha, por

EST. I. exemplo, de determinar quanto he preciſo de tapeceria para huma ſala; ou quantas braças quadradas conterá hum terreno murado em fórma de hum rectangulo, &c.

Bem ſe conhece, que para ſe chegar a eſta ſorte de determinaçóes, o meio mais ſimples, e mais natural he de nos ſervirmos de huma medida commua, que applicada muitas vezes ſobre a ſuperficie, que ha para medir, a cubra inteiramente: methodo, que vem a ſer o meſmo, que já ſervio para determinar o comprimento das linhas.

Ora he evidente que a medida ordinaria das ſuperficies deve ſer em ſi meſma huma ſuperficie, por exemplo, a de huma braça quadrada, de hum pé quadrado, &c. Aſſim medir hum rectangulo, he determinar o numero de braças quadradas, ou de pés quadrados, &c. que a ſua ſuperficie contém.

Ponhamos hum exemplo para il-

lu-

luminar o entendimento. Supponhamos que o rectangulo dado ABCD (Fig. 9.) tenha 7 palmos de altura sobre huma base de 8 palmos; poder-se-ha considerar este rectangulo como repartido em sete bandas, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, e que cada huma contenha 8 palmos quadrados: será pois o valor do rectangulo sete vezes 8 palmos quadrados, ou 56 palmos quadrados. EST. I.

Se agora nos lembrarmos dos primeiros elementos do calculo Arithmetico, que multiplicar dous numeros he tomar hum tantas vezes, como a unidade se contém no outro, achar-se-ha huma perfeita analogia entre a multiplicação ordinaria, e a operação, pela qual se mede o rectangulo. Ver-se-ha que multiplicando o numero de braças, ou de palmos, &c. que tiver a sua altura, pelo numero de braças, ou palmos, que der a sua base, se determinará a quantidade de braças

A medida de hum rectangulo he o producto da sua base pela sua altura.

EST. I. quadradas, ou de palmos quadrados, que contiver a sua superficie.

XIII.

As figuras, que ha para medir, não são sempre regulares, como o são os rectangulos; e não obstante isto, he muitas vezes necessario ter a sua medida: humas vezes será preciso saber a extensão de huma obra construida sobre hum terreno falto de regularidade; outras se quererá saber o que hum terreno irregularmente limitado conterá de braças quadradas: era pois necessario que ao methodo de determinar a extensão dos rectangulos se ajuntasse o de medir as figuras, que não são rectangulares.

Figuras rectilineas são aquellas, que se terminam em linhas rectas.

Vemos logo que na prática a difficuldade não está senão na medição das figuras rectilineas, taes como ABCDE, (Fig. 10.) isto he das figuras terminadas por linhas rectas; porque se no contorno de hum terre-

reno ſe acham algumas linhas cur- EST. I.
vas, como na figura ABCDEFG, (Fig. 11.) he evidente que eſtas linhas repartidas em tantas partes, quantas forem neceſſarias para evitar todo o erro ſenſivel, ſe poderáõ ſempre tomar por hum ajuntamento de linhas rectas.

Iſto ſuppoſto, vê-ſe que não obſtante a infinita variedade de figuras rectilineas, todas ſe podem medir do meſmo modo, repartindo-as em figuras de tres lados, chamadas ordinariamente triangulos; o que ſe fará da maneira a mais ſimples, e a mais cómmoda, ſe de qualquer ponto A (Fig. 10.) do contorno da figura ABCDE ſe tirarem as linhas rectas AC, AD, &c. aos pontos C, D, &c.

O triangulo he huma figura terminada por tres linhas rectas.

XIV.

Logo não ſerá preciſo ſenão ter a medida dos triangulos, que ſe tiverem formado. Ora ſabe-ſe, que pa-

EST. I. para ſe achar o que ſe ignora, o meio mais ſeguro he de procurar ſe nas couſas, de que temos conhecimento, ha alguma, que ſe conforme com o que ſe quer ſaber; e já ſe tem viſto que todo o rectangulo ABCD (Fig. 12.) he igual ao producto da ſua baſe AB pela ſua altura CB. Demais he facil de perceber, que eſta figura cortada transverſalmente pela linha AC, chamada diagonal, ſe acha repartida em dous triangulos iguaes; do que ſe infere, que cada hum deſtes triangulos igualará a metade do producto da ſua baſe AB, ou CD pela ſua altura CB, ou DA.

A diagonal de hum rectangulo he a linha, que o reparte em dous triangulos iguaes.

He verdade que quaſi nunca ſuccede que os triangulos, que ha para medir, tenham dous dos ſeus lados perpendiculares hum ao outro, como os triangulos ABC, ADC, chamados triangulos rectangulos; porém nada impede que ſe não poſſam reduzir todos a triangulos deſta eſpecie.

Os triangulos rectangulos são aquelles, que tem dous dos ſeus lados perpendiculares hum ao outro.

Por-

Porque se do ponto A, (Estampa II. Fig. 1.) vertice de hum triangulo qualquer ABC, se abaixar a perpendicular AD sobre a base BC, o triangulo ABC se achará repartido em dous triangulos rectangulos ABD, ADC. EST. II.

Tornando pois ao que dissemos, he evidente, que como os dous triangulos ADB, ADC serão ametades dos rectangulos AEBD, ADCF, o triangulo proposto ABC será da mesma sorte ametade do rectangulo EBCF, que terá BC por base, e AD por altura; e como a superficie do rectangulo EBCF igualará o producto da altura EB, ou AD pela base BC, o triangulo ABC terá por medida a metade do producto da base BC pela perpendicular AD altura do triangulo.

Hum triangulo he a metade de hum rectangulo, que tem a mesma base, e a mesma altura.

Logo a sua medida he a metade do producto da sua altura pela sua base.

Temos pois o modo de medir todos os terrenos terminados por linhas rectas, pois que se não acha algum, que se não possa reduzir a

tri-

EST. II. triangulos, e que dos vertices destes triangulos se sabe abaixar perpendiculares sobre as suas bases.

XV.

Os triangulos, que tem a mesma altura, e a mesma base, tem as superficies iguaes.

Do que dissemos no precedente methodo, que para medir os terrenos, ou as superficies dos triangulos bastava sómente servir-se das suas bases, e das suas alturas, sem attender ao comprimento dos seus lados, se tira esta proposição, ou theorema, que todos os triangulos, como ECB, (Fig. 2.) ACB, que tem huma base commua CB, e cujas alturas EF, AD são iguaes, tem a mesma superficie.

XVI.

Para facilitar a intelligencia do principio, que dá a medida dos triangulos, entendemos que não deviamos escolher por base senão hum lado, sobre o qual pudesse cahir a perpendicular abaixada do vertice opposto, o que sempre se póde fazer, quan-

quando sómente se trata da medição dos terrenos. Mas porque na comparação dos triangulos, que tem a mesma base, as perpendiculares abaixadas dos seus vertices podem cahir fóra do triangulo, como na Figura 3, parece que seja necessario ver se os triangulos, taes como BCG, estam no caso dos outros; isto he se elles são sempre a metade do rectangulo ECBF, que tem a perpendicular GH por altura. EST. II.

He facil o certificar-se disto, notando que o triangulo CGH, somma dos dous triangulos CGB, GBH, he a metade do rectangulo ECHG, somma dos dous rectangulos ECBF, FBHG; e que assim os dous triangulos CGB, GBH valem ambos juntos a metade do rectangulo ECHG. Ora o triangulo GBH he metade do rectangulo FBHG: logo o triangulo proposto BCG he metade do outro rectangulo ECBF, que tem BC por base, e GH por altura.

A

EST. II.

XVII.

Os triangulos, que tem a meſma baſe, e eſtam entre as meſmas parallelas, são iguaes em ſuperficie.

A propoſição demonſtrada nos tres Artigos precedentes tambem ſe póde expôr geralmente neſtes termos: Os triangulos EBC, (Fig. 4.) ABC, GBC são iguaes; quando elles tem huma baſe commua BC, e que eſtam entre as meſmas parallelas EAG, CBH, iſto he, quando os ſeus vertices E, A, G eſtam em huma meſma linha recta EAG, parallela á recta CB, porque então (Artigo XI.) as ſuas alturas medidas pelas perpendiculares EF, AD, GH são as meſmas.

XVIII.

Entre as differentes figuras rectilineas, que ſe ſabem medir pelo methodo precedente, ha algumas, que ſe approximam á regularidade dos rectangulos, que são os eſpaços taes como ABCD (Fig. 5.) terminados por quatro lados, dos quaes cada hum

EST. II.

hum he parallelo ao lado, que lhe está opposto. Estas figuras se chamão parallelogramos; ellas são mais faceis de medir, do que as outras figuras rectilineas, exceptuando os rectangulos; porque repartindo o parallelogramo ABCD em dous triangulos ABC, ACD, estes dous triangulos serão visivelmente iguaes: ora como cada hum destes triangulos valerá a metade do producto da sua altura AF pela base BC, o parallelogramo terá por medida o producto inteiro da base BC pela altura AF.

Os parallelogramos são figuras de quatro lados, da qual os dous oppostos são parallelos.

Medem-se, multiplicando o producto da sua base pela sua altura.

XIX.

Do que se segue, que todos os parallelogramos ABCD, (Fig. 6. ou 7.) EBCF, que tiverem huma base commua, e estiverem entre as mesmas parallelas, serão iguaes; o que he facil de ver ainda independentemente do que precede, notando que o parallelogramo ABCD se mudará no parallelogramo EBCF, ajuntando-

Os parallelogramos, que tem huma base commua, e que estam entre as mesmas parallelas, são iguaes em superficie.

EST. II. do-ſe-lhe o triangulo DCF, e tirando o triangulo ABE da figura inteira ABCF; que aſſim, ſuppondo-ſe ſerem iguaes os dous triangulos DCF, ABE, ſerá evidente que o parallelogramo ABCD não terá mudado de extensão, mudando-ſe em EBCF. Ora para nos certificarmos da igualdade deſtes dous triangulos, baſtará obſervar que AB, e CD, ſendo parallelas, como tambem BE, e CF, o triangulo ABE não ſerá outra couſa ſenão o triangulo DCF, que ſe terá adiantado, ſegundo a direcção da ſua baſe, de ſorte que o ponto A terá chegado a D, e E a F.

XX.

Os polygonos regulares são figuras terminadas por lados iguaes,

Ha tambem outras figuras rectilineas, que são faceis de medir, e que ſe chamam polygonos regulares, figuras, que ſe terminam em lados iguaes, que todos tem a meſma inclinação huns ſobre os outros. Taes

são

são as figuras ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH. (Fig. 8, 9, e 10.)

EST. II. e igualmente inclinados huns sobre os outros.

Como se costuma dar a fórma symmetrica destas figuras aos tanques, aos chafarizes, ás praças públicas, &c. parece que antes de as ensinar a medir seja preciso ver de que modo ellas se tração.

XXI.

Mancira de descrever hum polygono, de hum numero determinado de lados.

Descreva-se huma circumferencia de circulo; reparta-se em tantas partes iguaes, quantos forem os lados, que se quizer dar ao polygono; depois tirem-se as linhas (Fig. 8.) AB, BD, DE, &c. pelos pontos A, B, D, E, &c. que dividindo a circumferencia, darão o polygono, que se quer, o qual se chamará pentagono, ou hexagono, ou heptagono, ou octogono, ou eneagono, ou decagono, &c. segundo tiver, sinco, ou seis, ou sete, ou oito, ou nove, ou dez, &c. lados.

O pentagono tem 5 lados, o hexagono 6, o heptagono 7, o octogono 8, o eneagono 9, o decagono 10

Pa-

EST. II.

XXII.

Medida da ſuperficie de hum polygono regular.

Para ſe ter a medida de hum polygono regular, podia-ſe uſar do methodo, que já ſe deo (Artigo XIII.) para todas as figuras rectilineas; porém facilmente ſe vê, que o mais breve he repartir o polygono em triangulos iguaes, que tenham todos o centro C (Fig. 10.) por vertice; e porque tomando hum deſtes triangulos, CBD por exemplo, e tirando ſobre a baſe BD a perpendicular CK, que então ſe chamará o apothêma do polygono, como a área do triangulo valerá o producto da baſe BD pela metade de CK, eſte producto tomado tantas vezes quantas forem os lados do polygono, dará a área da figura inteira.

O apothêma he a perpendicular abaixada do centro da figura ſobre hum dos ſeus lados.

XXIII.

Repartindo-ſe a circumferencia do circulo em tres partes iguaes, ſe formaria hum triangulo chamado com-

commummente triangulo equilatero; repartindo-se esta circumferencia em quatro partes iguaes, se formaria hum quadrado; porém estas duas figuras as mais simples de todos os polygonos, se podem facilmente traçar, sem que seja necessario recorrer á divisão do circulo, como já se vio (Artigo IX.) para o quadrado. Respeito ao triangulo equilatero, he facil de perceber, que para o descrever sobre huma base dada AB, (Fig. 11.) he necessario que dos pontos A, e B, como centros, e com huma abertura de compasso igual a AB, se tracem os arcos DCF, e GCH; e que depois se tirem dos pontos A, e B as linhas AC, BC ao ponto C, secção commua dos dous arcos DCF, GCH, e vertice do triangulo.

EST. II. O triangulo equilatero he aquelle, que tem os tres lados iguaes.

Modo de descrever o triangulo equilatero.

XXIV.

Ao methodo de descrever geometricamente o triangulo equilatero, e o quadrado, que são os primeiros

ros

EST. II. ros de todos os polygonos, poderia eu ajuntar o de traçar geometricamente hum pentagono, como muitos Authores fizeram nos Elementos, que nos deram; mas porque os Principiantes, para quem sómente aqui trabalhamos, não perceberiam, senão com trabalho, o caminho, que o entendimento devia seguir, procurando a maneira de traçar esta figura, caminho, que a Algebra nos põe em estado de descubrir, será melhor deixar a descripção do pentagono para o Tratado, que a este se seguirá, no qual se ajuntará á descripção delle a de todos os mais polygonos, que tiverem maior numero de lados, que sem o soccorro da Algebra se não poderiam descrever geometricamente.

Dos polygonos, que tem mais de sinco lados, dos quaes digo que não se podem descrever senão por meio do calculo Algebraico, he preciso exceptuar os de 6, de 12, de

24,

24, de 48, &c. lados; e os de 8, EST. II.
de 16, de 32, de 64, &c. lados, que facilmente ſe podem deſcrever pelos methodos, que dá a Geometria elementar, como ſe verá no fim deſta primeira Parte.

XXV.

Tórno á medição dos Terrenos; e vejo que aquelles, que ſe querem medir, são muitas vezes taes, que não admittem as operações, que os methodos precedentes preſcrevem.

Supponho que ABCDE (Fig. 12.) ſeja a figura de hum campo, de hum circuito, &c. do qual ſe quererá ter a medida. Segundo o que ſe tem viſto, ſeria preciſo repartir ABCDE em triangulos, como ABC, ACD, ADE, e então medir eſtes triangulos, depois de ter abaixado as perpendiculares EF, CH, BG; porém ſe no eſpaço ABCDE ſe encontra algum obſtaculo, huma elevação, hum boſque, hum lago, &c. que

EST. II. impede tirarem-ſe as linhas, que ſe preciſam, que ſe fará então? que methodo ſerá neceſſario ſeguir para remediar eſte inconveniente do terreno? O methodo, que logo ſe apreſenta á idéa, he o de eſcolher algum terreno plano, onde ſe poſſa á vontade trabalhar, e deſcrever ſobre elle triangulos iguaes, e ſemelhantes aos triangulos ABC, ACD, &c. Vejamos como nos haveremos para formar os novos triangulos.

XXVI.

EST. III.

Tendo-ſe reconhecido os tres lados de hum triangulo, fazer outro, que lhe ſeja igual.

Principiemos, ſuppondo que o obſtaculo ſe acha no interior do triangulo ABC, (Eſtampa III. Fig. 1.) cujos lados ſejam reconhecidos; e que ſe queira traçar hum triangulo igual, e ſemelhante ſobre o terreno eſcolhido: deſcreva-ſe huma linha DE (Fig. 2.) igual ao lado AB, e tomando hum cordel do comprimento BC, firmando huma das ſuas extremidades em E, ſe deſcreva o ar-

arco IFG, do qual ſerá radio o cordel; depois por meio de outro cordel igual a AC, do qual ſe firmará tambem huma das pontas em D, ſe traçará o arco KFH, que cortará o primeiro em F; então tirando as linhas DF, e FE, ſe terá o triangulo DEF, igual, e ſemelhante ao triangulo propoſto ABC; o que he evidente, porque os lados DF, e EF, que ſe unírão no ponto F, ſendo reſpectivamente iguaes aos lados AC, e BC, unidos no ponto C, e a baſe DE tendo-ſe medido igual a AB, não ſerá poſſivel que a poſição das linhas DF, e EF ſobre DE ſeja differente da poſição das linhas AC, e BC ſobre AB. He verdade que ſe podiam tomar as linhas D*f*, E*f* por baixo de DE; porém o triangulo ſería o meſmo, ſó ſeria ſimpleſmente ás aveſſas. EST. III.

XXVII.

Não ſendo poſſivel medir ſenão dous dos tres lados do triangulo

EST. III. ABC, (Fig. 3.) por exemplo, os dous lados AB, BC, claro eſtá que com iſto ſómente não ſe poderia deſcrever outro triangulo igual, e ſemelhante a ABC; porque ainda que ſe tiveſſe tomado DE, (Fig. 4.) igual a BC, (Fig. 3.) e DF igual a BA, não ſe ſaberia que poſição ſe havia de dar a DF relativamente a BA. Para ſe tirar eſta difficuldade, o modo, que ſe apreſenta, he ſimples: da meſma ſorte ſe faz pender DF ſobre DE, como AB pende ſobre BC; ou, por exprimir a couſa como os Geometras, ao angulo FDE ſe dá a meſma abertura, que tem o angulo ABC. *

Hum angulo he a inclinação de huma linha ſobre a outra.

XXVIII.

Modo de fazer hum angulo igual a outro.

Para ſe fazer eſta operação, toma-ſe hum inſtrumento tal como *a b c* compoſto de duas regras, que ſe

---

* Quando hum angulo ſe aponta com tres letras, a do meio eſtá no vertice do angulo; a primeira, e a ultima nas extremidades dos lados.

ſe poſſam mover ao redor do ponto *b*, e ſe applicam eſtas regras ſobre os lados AB, e BC. Deſta ſorte fazem ellas entre ſi o meſmo angulo, que fazem os lados AB, e BC. Pondo pois a regra *b c* ſobre a baſe DE (Fig. 4.) de ſorte que o centro *b* correſponda ao ponto D, e que a abertura do inſtrumento ſeja ſempre a meſma, a regra *a b* dará a poſição da linha DF, a qual fará com a linha DE o angulo FDE igual ao angulo ABC. Ora a linha DF ter-ſe-ha tomado do meſmo comprimento de AB: logo não faltará mais do que tirar de F a E a recta FE para ſe ter o triangulo FDE inteiramente igual, e ſemelhante ao triangulo ABC. Prática ſimples, pela qual ſe ſuppõe eſte principio evidente, que hum angulo he determinado pelo comprimento de dous dos ſeus lados; e pela abertura delles; ou, que he o meſmo, que hum triangulo he igual a outro, quando dous dos ſeus la-

EST. III.

Dados dous lados, e o angulo comprehendido, eſtá o triangulo determinado.

EST. III. lados são reſpectivamente iguaes, e que o angulo comprehendido entre eſtes lados he igualmente aberto.

XXIX.

Tambem ſe poderia fazer o angulo FDE (Fig. 6.) igual ao angulo ABC (Fig. 5.) da maneira ſeguinte.

Segunda maneira de fazer hum angulo igual a outro.

Do centro B, e com qualquer intervallo B *a* deſcrevei o arco *a h c*: e do centro D, (Fig. 6.) e com o meſmo intervallo, traçai o arco *e i f*; então não vos faltará mais do que procurar hum ponto *f*, que eſteja no arco *e i f*, do meſmo modo que *a* ſe acha no arco *c h a*. Ora vós facilmente achareis o ponto *f*, ſervindo-vos da recta *a c*, que, ſegundo a definição ordinaria, ſe chamará a corda do arco *a h c*.

A corda de hum arco de circulo he a recta, que ſe termina nas duas extremidades do arco.

Porque ſe do centro *e*, e com hum intervallo igual a *a c* deſcreverdes o arco *k f l*, a ſecção dos dous arcos *e i f*, *k f l* vos dará o ponto procurado *f*.

Ti-

Tirai depois por D, e f a linha DfF, e tereis o angulo FDE igual ao angulo ABC. O que he evidente, (Artigo XXVI.) pois que os triangulos B *a c*, D *f e* ferão inteiramente iguaes, e femelhantes em todas as fuas partes. EST. III.

XXX.

Se quando fe quer fazer o triangulo FDE (Fig. 4.) igual ao triangulo ABC, (Fig. 3.) fuccede que fe não póde medir fenão hum dos lados, BC por exemplo, recorre-fe aos angulos ABC, e ACB. Tendo feito DE igual a BC, fituão-fe as linhas DF, e FE, de forte que ellas façam com DE os mefmos angulos que AB, e AC fazem com BC: então pelo encontro deftas linhas fe tem o triangulo FDE igual, e femelhante ao triangulo ABC. O principio, que fuppõe efta propofição, he de fi mefmo tão fimples, que não precifa de demonftração.

Dous angulos, e hum lado determinam o triangulo.

Se

EST. III.

XXXI.

Se dos tres lados do triangulo ABC (Fig. 7.) se não pudesse medir senão a base BC, e que demais se soubesse que este triangulo era isosceles, isto he, que os dous lados AB, e AC fossem iguaes, he evidente que bastaria medir hum dos dous angulos ABC, ACB, porque então o outro lhe seria igual.

Triangulo isoscele he aquelle, que tem dous lados iguaes.

Facilmente se conhece a razão disto, se nos representarmos o que succederia, supondo que os dous lados AB, AC do triangulo ABC (Fig. 7.) estivessem primeiramente deitados sobre BD, e sobre CE, prolongações da base BC, e que depois se levantassem para unir as suas extremidades no ponto A; porque então a igualdade destes dous lados os impediria de andar hum mais do que o outro: logo estando unidos penderiam igualmente sobre a base BC: logo o angulo ABC será igual ao angulo ACB.

Os angulos, que estes lados fazem com a base, são entre si iguaes.

Tor-

EST. III.

XXXII.

Tornando á medição dos terrenos, ſe verá que quaeſquer que ſejam os obſtaculos, que ſe poſſam encontrar no interior delles, ſerá facil pelo precedente methodo de tranſportar para hum terreno deſembaraçado todos os triangulos, os quaes repartiráõ o eſpaço que ſe quizer medir.

Supponhamos, por exemplo, que quizeſſeis medir hum boſque, cuja figura foſſe ABCDEFG. (Fig. 8.)

Conſtruirêis logo hum triangulo igual a ABC, o que podeis fazer ſem entrar no interior deſte triangulo, medindo os dous lados AB, BC, e o angulo nelles comprehendido CBA.

Eſte triangulo deſcripto dará o angulo BCA, e o comprimento de AC; e como vós podeis medir o lado exterior DC, tereis no triangulo CAD os lados DC, e CA. Quanto

EST. III. to ao angulo DCA, vós o acharêis, tomando logo o angulo IKL (Fig. 9.) igual ao angulo DCB, depois o angulo LKO, igual ao angulo BCA, o que vos dará o angulo, que resta IKO, igual ao angulo procurado DCA.

O triangulo ADC, sendo assim determinado pelos dous lados DC, e CA, e pelo angulo comprehendido DCA, vós conhecerêis do mesmo modo o triangulo DAG, e o resto da figura.

XXXIII.

Do methodo, que se tem dado para se medirem os terrenos, em que se não poderiam tirar linhas, nascem muitas vezes grandes difficuldades na prática. Raras vezes se acha hum espaço plano, e desembaraçado, que seja bastantemente grande, para nelle se fazerem os triangulos iguaes aos do terreno, que se quer medir. E ainda quando este se achas-

achaſſe, o grande comprimento dos EST. III.
lados dos triangulos poderiam fazer que as operações foſſem ſummamente difficultoſas: abaixar huma perpendicular ſobre huma linha de hum ponto diſtante della sómente, v. gr. 500 braças, sería huma obra muito penoſa, e talvez impraticavel. Importa pois que haja hum meio, que ſuppra eſtas grandes operações.

Eſte meio quaſi por ſi meſmo ſe offerece: logo vem á imaginação o repreſentar a figura que ha para medir ABCDE, (Eſtampa IV. Fig. 1. EST. IV.
e 2.) em huma figura ſemelhante *a b c d e*, porém mais pequena, na qual, por exemplo, o lado *a b* ſeja de 100 pollegadas, ſe o lado AB he de 100 braças; o lado *b c* de 45 pollegadas, ſe BC he de 45 braças, e daqui concluir depois, que ſe a extensão da figura reduzida *a b c d e* tem 60000 pollegadas quadradas, a da figura ABCDE deve ſer de 60000 braças quadradas.

Po-

EST. IV. Porém primeiro que tudo, he neceſſario ſaber em que conſiſte a ſemelhança de duas figuras.

XXXIV.

Em que conſiſte a ſemelhança de duas figuras.

Ora por pouco que niſto ſe faça reflexão, logo ſe verá que as duas figuras ABCDE, *a b c d e*, para ſerem ſemelhantes, devem ſer taes, que os angulos A, B, C, D, E da grande ſejam iguaes aos angulos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* da pequena; e que demais os lados *a b*, *b c*, *c d*, &c. da pequena contenham tantas partes de *p*, quantas os lados AB, BC, CD, &c. da grande contém de partes P.

XXXV.

Para exprimir eſta ſegunda condição, dizem os Geometras que he neceſſario que os lados AB, BC, CD, &c. ſejam proporcionaes aos lados *a b*, *b c*, *c d*, &c.; ou que o lado AB contenha *a b*, da meſma ſorte que BC contém *b c*, &c.; ou que o lao lado AB ſeja tão grande reſpectivamenre a *a b*, como BC o he reſpectivamente a *b c*, &c.; ou tambem que alli haja a meſma razão, ou a meſma relação entre AB, e *a b*, como entre BC, e *b c*, &c.; ou finalmente, que AB ſeja para *a b*, como BC para *b c*, &c. Tudo iſto são modos differentes de explicar a meſma couſa; porém he preeiſo familiarizar-ſe com elles para ſe entender a linguagem dos Geometras. EST. IV.

XXXVI.

Modo de fazer huma figura ſemelhante a outra.

Depois de ſe ter viſto em que conſiſte a ſemelhança de duas figuras, vejamos qual ſeja o caminho, que a natureza nos indica para traçar huma figura ſemelhante a outra. Para o que repreſentemo-nos hum Deſenhador, que quer copiar huma figura, reduzindo-a.

Logó tomando elle *a b*, para repreſentar a baſe AB da figura que tem para copiar ABCDE, inclina ſobre

a b

EST. IV. *a b* os lados *a e*, e *b c*, do meſmo modo que AE, e BC eſtam inclinados ſobre AB; com tanto que os comprimentos de *a e*, e de *b c* ſejam para o de *a b*, como os comprimentos de AE, e de BC os são para o de AB; iſto he, que ſe AE, por exemplo, he a metade de AB, elle faz *a e* igual á a metade de *a b*, e uſa da meſma ſorte para determinar o comprimento de *b c* relativamente a BC.

Tendo elle aſſim determinado os pontos *e*, e *c*, traça as linhas *e d*, e *c d*, inclinando-as ſobre *e a*, e ſobre *c b*, da meſma ſorte que ED, e CD eſtam inclinadas ſobre EA, e CB; e prolongando eſtas linhas até que ellas ſe encontrem em *d*, acaba a ſua figura *a b c d e*.

XXXVII.

Faça-ſe agora reflexão ſobre a conſtrucção deſta figura, e ver-ſe-ha que ella não he fundada ſenão na igual-

da-

dade que ha entre os angulos E, A, B, C, e *e*, *a*, *b*, *c*, e na proporcionalidade dos lados EA, AB, BC, e dos lados *e a*, *a b*, *b c*, que assim se acha a figura terminada, sem que se tenha tomado o angulo *d* igual ao angulo D, nem os lados *e d*, *c d* proporcionaes aos lados ED, CD; reflexão esta, que á primeira vista faria duvidar que o angulo *d* não fosse com effeito igual ao angulo D, nem os lados *ed*, *c d* proporcionaes aos lados ED, CD; e que por consequencia a figura *a b c d e* não se achasse inteiramente semelhante á figura ABCDE; mas quando não houvesse mais do que a experiencia para nos certificarmos disto, esta dúvida se dissiparia logo; além de que, por pouca attenção que nisto se faça, bem se vê que da igualdade respectiva dos quatro angulos E, A, B, C, e *e*, *a*, *b*, *c*, e da proporcionalidade dos tres lados EA, AB, BC, e *e a*, *a b*, *b c* resulta necessaria- EST. IV.

EST. IV. riamente a igualdade dos angulos D, *d*, e a proporcionalidade dos lados ED, CD, e *e d*, *c d*.

Não obſtante, para tirar toda a dúvida, moſtraremos que todas as condições, que pede a ſemelhança das figuras, são neceſſariamente dependentes humas das outras; o que nos ſerá facil de fazer, examinando logo os triangulos, que são as figuras mais ſimples, e que entram neceſſariamente na compoſição de todas as mais, cujo exame nos conduzirá a todas as propriedades, e a todos os uſos das figuras ſemelhantes.

XXXVIII.

Se dous angulos de hũ triangulo são iguaes a outros dous do outro triangulo, o terceiro angulo de hum igualará o terceiro angulo do outro.

Supponhamos que ſobre a baſe *a b* (Fig. 3. e 4.) ſe trace o triangulo *a b c*; e não tomando ſenão os angulos *c a b*, *c b a*, iguaes aos angulos CAB, CBA do triangulo ABC, haverá primeiramente a certeza, que o terceiro angulo *a c b* igualará o terceiro angulo ACB.

Por-

Porque pondo-se o triangulo *abc* sobre o triangulo ABC, de sorte que o ponto *a* fique sobre o ponto A, *ab* sobre AB, e *ac* sobre AC, claro está que o lado *cb* será parallelo a CB; e isto porque o lado *cb* prolongado não poderia encontrar-se com o lado CB, sem que as duas linhas pendessem desigualmente sobre AB; e que por consequencia os angulos *cba*, e CBA fossem desiguaes, o que seria contra a supposição. EST. IV.

Como da igualdade dos angulos *c b a*, e CBA se seguirá que as linhas *c b*, CB serão parallelas, do parallelismo destas linhas se seguirá tambem que os angulos A *c b*, ACB serão iguaes, que he o que se pertendia provar.

XXXIX.

Agora mostremos que os lados, que se correspondem em dous triangulos *a c b*, e ACB, que tem os mesmos angulos, são proporcionaes. Dous triangulos, cujos angulos são respectivamẽte iguaes, tem os seus lados proporcionaes.

E Pa-

EST. IV. Para nos certificarmos disto, supponhamos que *a b* seja a metade de AB; será preciso que provemos que *a c* será tambem a metade de AC, e *b c* a metade de BC. Que *a c b*, como no Artigo precedente, tenha tambem a posição de A *c b*: se se tirar *c g* parallela a AB, claro está que esta linha igualará *b* B, ou A *b*; e que *g* B igualará tambem *c b*. Ora como os angulos *c g* C, e C *c g* serão manifestamente iguaes aos angulos *c b* A, e *c* A *b*, o triangulo C *c g* igualará o triangulo *c* A *b*. (Artigo XXX.) Logo C *c* será igual a A *c*, e C *g* igual a *c b*, ou a *g* B. Logo A *c*, ou *a c* será a metade de AC, e *c b* a metade de CB.

Se *a b* (Fig.3. e 5.) estivesse comprehendido tres, quatro, ou qualquer outro numero de vezes, que se quizesse, em AB, seria igualmente facil de demonstrar, que *a c* seria comprehendido o mesmo numero de vezes em AC, e *c b* em CB. Porque

que dos pontos de divisão *b*, *f* da base AB, tirando *b c*, *f h*, &c. parallelas a BC, se poderiam pôr pelo comprimento de AC tres, quatro, &c. triangulos A *c b*, *c h g*, *h* C *i*, &c. iguaes ao triangulo *a c b*. EST. IV.

Mas ainda que *a b* em lugar de ser comprehendido exactamente hum numero certo de vezes em AB, (Fig. 3. e 6.) o fosse com algum quebrado, por exemplo, duas vezes e meia, provar-se-hia que *a c* caberia tambem duas vezes e meia em AC, e *b c* duas vezes e meia em BC.

Porque quando por meio das parallelas *b c*, (Fig. 6.) *f h* se tivesse posto pelo comprimento de AC, os dous triangulos A *c b*, *c h g*, iguaes a *a c b*, ficaria lugar entre as duas parallelas *h f*, e CB, para se pôr hum triangulo C *h i*, cujos lados seriam metades dos lados de *c* A *b*; o que he evidente, pois que pela supposição, *f* B seria a metade de

 A *b*,

EST. IV. A *b*, e que a baſe *h i* do triangulo C *h i* igualará *f* B, por cauſa das parallelas *hf*, CB: logo, em geral, quando dous triangulos ABC, *a b c* tem os meſmos angulos, eſtes triangulos chamados triangulos ſemelhantes, tem os ſeus lados proporcionaes; ou, que he abſolutamente o meſmo, os lados AB, BC, AC, de hum deſtes triangulos, ABC contém o meſmo numero de partes P, como os lados *a b*, *b c*, *a c*, do outro triangulo *a b c*, contém de partes *p*. P, ſendo o palmo, a braça, &c. ou em geral o petipé, com o qual ABC foi conſtruido; e *p* aquelle, com que ſe conſtruio *a b c*.

XL.

Da propoſição, que acabamos de demonſtrar, ſe tira naturalmente a ſolução de hum problema, que he muitas vezes util na prática.

Dividir huma linha em quantas partes iguaes ſe quizer.

Pede-ſe que huma linha ſe divida em hum numero dado de partes iguaes,

iguaes, o que na verdade ſe poderia fazer por tentativas; porém já mais com aquella ſegurança, que nos dá a exacção geometrica.

Supponhamos, por exemplo, que temos para dividir AB (Fig. 5.) em tres partes iguaes; principia-ſe, tirando huma linha indefinita AC, que faça hum angulo, qualquer que ſeja, com AB; depois põem-ſe ſobre eſta linha tres partes iguaes A *c*, *c h*, *h* C com huma abertura de compaſſo tomada á vontade; logo tirando a linha CB, ſe tiram a eſta recta as parallelas *c b*, *h f*; deſta ſorte AB, cortada nos pontos *b*, e *f*, ſe acha repartida em tres partes iguaes; o que he manifeſto pelo Artigo precedente.

XLI.

Que couſa ſeja huma quarta linha proporcional a outras tres, e como ſe acham.

Se ſe quizer dividir huma linha em hum numero de partes, que tenha quebrados, como duas e meia, tres e hum quarto, &c. ou tambem que

EST. IV. que em geral ſe propuzeſſe o dividir a linha AB no ponto *b*, (Fig. 6.) de ſorte que AB foſſe para A*b*, como a linha NO para a linha MQ; tambem ſe vê que a ſolução do problema dependeria do Artigo XXXIX; iſto he, que ſeria neceſſario tirar pelo ponto A huma recta qualquer que ſeja, tomar ſobre eſta recta A*c*, e AC, iguaes a MQ, e a NO, depois tirar *cb* parallela a CB; e então o ponto *b* ſeria o ponto procurado.

Os Geometras exprimem deſtoutro modo o problema, que acabamos de reſolver. Achar a tres linhas NO, MQ, AB a quarta proporcional.

XLII.

As alturas dos triangulos ſemelhãtes são proporcionaes aos ſeus lados.

He evidente que dous triangulos ſemelhantes ABC, (Fig. 7. e 8.) *a b c* terão não ſómente os ſeus lados proporcionaes, mas que as perpendiculares CF, *c f*, que ſe abaixa-

xarem dos ſeus vertices C, *c*, ſobre EST. IV.
as baſes AB, *a b*, ſeguiráõ tambem a proporção dos lados; o que he tão facil de demonſtrar pelo que precede, que deixamos de nos demorar niſto.

XLIII.

Quanto á área dos triangulos ſemelhantes ABC, *a b c*, vê-ſe que a do primeiro conterá tantos quadrados X feitos pela medida P, como a área do ſegundo conterá de quadrados *x* feitos pela medida *p*. Porque como CF, e AB terão, pelo Artigo precedente, tantas partes P, quantas *c f*, e *a b* terão de *p*; a metade do producto de CF por AB, medida de ABC, (Artigo XIV.) dará o meſmo numero, como o que reſultará da metade do producto de *c f* por *a b* medida de *a b c*; porém com eſta differença, que CF, e AB, contando-ſe por partes P, o ſeu producto ſe contará por quadrados

EST. IV. dos X; e que *c f*, e *a b*, que se contaráõ por partes *p*, darão hum producto, que se contará por quadrados *x*.

XLIV.

O que acabamos de dizer sobre a medida dos triangulos semelhantes, serve de prova a huma proposição, que nos Elementos de Geometria se exprime ordinariamente desta sórte. Os triangulos semelhantes ABC, *a b c* são entre si como os quadrados ABDE, *a b d e* dos seus lados homologos, ou correspondentes AB, *a b*.

As áreas dos triangulos semelhantes são entre si, como os quadrados dos seus lados homologos.

A demonstração, que o Artigo precedente contém, traz absolutamente esta consequencia; porque o quadrado ABDE, contendo tanto de X, como *a b d e* contém de *x*, he evidente que os dous numeros de quadrados X, que exprimem a relação do triangulo ABC, para o quadrado ABDE, são os mesmos, que

os

os numeros de quadrados *x*, que dam a relação do triangulo *a b c* para o quadrado *abde*; ou, o que vem a ser o mesmo, que o triangulo ABC he para o quadrado ABDE, como o triangulo *a b c* para o quadrado *a b d e*. EST. IV.

Disto se segue, que se, por exemplo, o lado AB fosse duplo do lado *a b*, o triangulo ABC seria quadruplo do triangulo *a c b*; que se AB fosse triplo de *a b*, o triangulo ACB seria nove vezes maior do que o triangulo *a c b*, &c.; porque AB não póde ser duplo de *a b*, sem que o quadrado ABDE seja quadruplo de *a b d e*, &c.

XLV.

Para passar agora dos triangulos ás mais figuras, supponhamos que a cada hum dos triangulos semelhantes ABD, (Fig. 1. e 2.) *a b d* se ajuntem outros dous triangulos ADE, e BDC, *ade*, e *bdc*, os dous primeiros

A mesma EST. IV. Propriedades das figuras semelhã-

EST. IV. tes, tiradas das dos triangulos.

ros ſemelhantes aos ſegundos, verſe-ha que nas figuras totaes ABCDE, *a b c d e*,

1.° Os angulos A, B, C, D, E ſerão os meſmos, que são os angulos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; o que he evidente, pois que huns, e outros ſerão ou angulos correſpondentes de triangulos ſemelhantes, ou angulos compoſtos deſtes angulos correſpondentes.

2.° Ver-ſe-ha que a proporção dos lados homologos, ou correſpondentes DE, *d e*, BC, *b c*, &c. das figuras ABCDE, *a b c d e*, ſerá neceſſariamente a meſma; iſto he, que ſe P, por exemplo, ſe acha hum certo numero de vezes na baſe AB, e que *p* ſe acha o meſmo numero de vezes em *a b*; P, e *p* ſerão tambem comprehendidos hum meſmo numero de vezes em dous lados homologos, quaeſquer que ſejam DE, e *d e*; pois por cauſa da ſemelhança dos triangulos ABD, *a b d*, a quantida-

de

de de P, que contiver AD, iguala- EST. IV.
rá a quantidade de *p* comprehendida em *a d*; então considerando estes lados como bases dos triangulos semelhantes ADE, *a d e*, o numero de partes P comprehendidas em DE, será o mesmo que for o numero de partes *p*, que conterá o lado *d e*.

3.° Ver-se-ha tambem, que se nas duas figuras se tirarem as linhas correspondentes, taes como CE, *c e*, ou as perpendiculares DF, *d f*, &c. estas linhas estarão sempre entre si na mesma razão em que estiverem os lados homologos das duas figuras.

Logo as figuras ABCDE, *a b c d e* serão inteiramente semelhantes em todas as suas partes.

XLVI.

Tendo-se assim descripto a figura *a b c d e* perfeitamente semelhante á figura ABCDE, he evidente que se se quizesse traçar de novo huma fi-

EST. IV. figura inteiramente igual a *a b c d e*, e por consequencia tambem semelhante a ABCDE, seria inutil o medir todos os lados, e todos os angulos de *a b c d e*; mas que bastaria, por exemplo, tomar os tres lados *a b*, *e a*, *b c*, e os quatro angulos *e*, *a*, *b*, *c*, e com isto sómente seriamos certos de traçar a mesma figura *a b c d e*, semelhante a ABCDE; o que fórma huma demonstração completa daquillo, que sómente se presumia. (Artigo XXXVII.) Mas póde-se ir mais adiante; porque claro está que sempre haverá differentes modos de combinar a quantidade dos angulos, e das linhas, que necessariamente se devem medir em qualquer figura, para della se fazer outra, que lhe seja proporcional; porém fatigariamos ao Leitor, querendo tratar este ponto mais diffusamente.

XLVII.

As áreas das figuras se-

Com discursos semelhantes aos do

do Artigo XLIII. ſe demonſtraria que o numero de quadrados X, que contém a figura ABCDE, he o meſmo que o de quadrados *x* comprehendidos na figura *a b c d e*; e que aſſim as áreas das figuras ſemelhantes são entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos.

EST. IV. melhantes são entre ſi, como os quadrados dos lados homologos.

XLVIII.

Tudo o que acabamos de dizer ſobre as figuras ſemelhantes, ſe póde reduzir a eſte ſó, e unico principio, que as figuras ſemelhantes não differem humas das outras, ſenão pelos petipés, por onde ellas são conſtruidas.

As figuras ſemelhantes não são diſferençadas ſenão pelos petipés, por onde ellas foram conſtruidas.

XLIX.

Agora para melhor ſe conhecer o uſo, que ſe deve fazer dos triangulos ſemelhantes, e das reducções, para ſe ter a medida dos terrenos, ſobre os quaes ſe não poderia commodamente trabalhar, figuremo-nos que

AB-

EST. V. ABCDEF (Eſtampa V. Fig. 1. e 2.) repreſente o contorno de huma Quinta, de hum Lago, &c. do qual ſe quizeſſe ſaber a extensão. Medir-ſe-ha logo hum dos lados da figura FE, por exemplo, e ver-ſe-ha quanto elle terá de varas, de braças, &c. depois tomando o petipé da grandeza que ſe quizer, ſe traçará ſobre hum papelão, ou papel huma linha *fe*, igual a tantas partes do petipé, quantas FE contiver de varas, de braças, &c.; e fazendo os angulos *def*, *dfe* iguaes aos angulos DEF, DFE, ſe terá o triangulo *edf*, no qual ſe abaixará *eg*, perpendicular a *df*: iſto feito, e as linhas *df*, e *eg*, ſendo medidas por meio do petipé, ſe concluirá que tantas partes reduzidas conterão eſtas linhas, como DF, e EG conterão de braças, de varas, &c. Aſſim multiplicando DF por a metade de EG, ſe ſaberá o valor do triangulo EDF; e medindo do meſmo modo cada hum

hum dos outros triangulos DCF, BCF, ABF, a área da figura toda ſe achará determinada. EST. V.

L.

Succede muitas vezes na prática ſer preciſo medir-ſe a diſtancia que ha do lugar F, onde ſe eſtá, a outro lugar, onde algum obſtaculo impede que ſe poſſa ir; novo Problema; porém já a ſua ſolução ſe deo anticipadamente no Artigo, que a eſte precede; porque ſe para ſe medir DF não houve neceſſidade, ſenão da ſemelhança dos triangulos *def*, e DEF, claro eſtá que medindo-ſe qualquer baſe EF, e podendo-ſe deſcubrir dos pontos F, e E o ponto D, eſtará o Problema reſolvido, iſto he, ſe terá a diſtancia FD.

Maneira de medir a diſtancia de hum lugar inacceſſivel.

LI.

O uſo, que ſe póde fazer dos inſtrumentos particulares, taes como

*b*A*c*,

EST. V. *b* A *c*, (Fig. 3.) que eu disse, (Artigo XXVIII.) composto de duas regras unidas no ponto A, á roda do qual ellas podem circular, traz comsigo varios inconvenientes. Humas vezes a abertura do angulo se mudará ao transportallo; outras a fórma, que somos obrigados a dar ao instrumento para facilitar o seu uso, impedirá que se possa applicar sobre o plano, em que se quer fazer a reducção.

Ajuntemos a isto, que cada novo angulo BAC, que se toma deste modo, pede que se transporte de novo o instrumento sobre o papel; e que o unico meio, que ha para comparar dous angulos, he de os pôr hum sobre o outro, sem que deste modo se possa ter justamente nem a relação, que ha entre elles, nem as suas grandezas absolutas.

LII.

Era pois necessario que se procucurasse huma medida fixa para os angulos, como já a havia para os comprimentos. Ora esta medida, que era necessario haver, foi facil de achar. Porque A *b* (Fig. 4.) ficando fixa, applica-se-lhe logo o lado A *c*; e fazendo gyrar este lado á roda de A, he certo que encostando-se á extremidade *c* da regra movel A *c* huma penna, ou hum lapis, que mostre sensivelmente o rasto do ponto *c*, este rasto, que formará hum arco de circulo, dará exactamente a medida do angulo para cada abertura particular dos lados A *b*, A *c*; isto he, que por ser uniforme a curvidade do circulo, necessariamente succederá que a huma abertura dupla, tripla, quadrupla de *c* A *b* corresponderá hum arco duplo, triplo, quadruplo de *c b*.

EST. V.

Hum angulo tem por medida o arco do circulo, que em si comprehendem os seus lados.

LIII.

Suppondo pois que a circumferencia *b c d f g*, (Fig. 4.) descripta

F pe-

EST. V. pela revolução inteira do ponto *c*, eſteja dividida em qualquer numero de partes iguaes, o numero de partes, de que o arco ſe compõe, e que eſtam poſtas entre as linhas A *c*, e A *b*, medirá exactamente a abertura deſtas linhas, ou o angulo *c* A *b*, que ellas formarem.

O circulo he dividido em 360 gráos, cada gráo em 60 minutos, cada minuto em 60 ſegundos, &c.

Convieram os Geometras em dividir o circulo em 360 partes, a que chamáram gráos, cada gráo em 60 minutos, cada minuto em 60 ſegundos, &c. Aſſim hum angulo *b* A *c*, por exemplo, terá 70 gráos, e 20 minutos, ſe o arco *b c*, que lhe ſervirá de medida, tiver 70 das 360 partes do circulo, e demais 20 das 60 partes de hum gráo.

LIV.

O angulo recto tem 90 gráos, e os ſeus lados ſão perpendiculares hum ao outro.

Do que ſe ſegue, que hum angulo CAB (Fig. 5.) de 90 gráos, chamado communmente angulo recto, he aquelle, cujos lados AC, e AB comprehendem o quarto BC da cir-

circumferencia, os quaes são perpendiculares hum ao outro. EST. V.

LV.

Chama-ſe angulo agudo o angulo mais pequeno do que hum angulo recto, ou que tem menos de 90 gráos. Taes são os angulos CAB, (Fig. 6.) FAG, EAG.

Hum angulo agudo he mais pequeno do que hum recto.

LVI.

Pelo contrario chama-ſe angulo obtuſo aquelle, que tem mais de 90 gráos, como FAB.

Hum angulo obtuſo he maior do que hum recto.

LVII.

He evidente que todos os angulos GAF, (Fig. 6.) FAE, EAC, CAB, que ſe podem fazer da meſma parte ſobre huma linha recta GB, e que tem o meſmo vertice A, tomando-os juntos, são iguaes a 180 gráos, ou a dous angulos rectos, medidos pela ſemicircumferencia.

A ſomma dos angulos feitos da meſma parte ſobre huma linha recta, e que tem o meſmo vertice, vale 180 gráos.

EST. V.

LVIII.

Todos os angulos, que ſe podem fazer á roda de hum meſmo ponto, são, tomando-os a todos juntos, iguaes a quatro angulos rectos.

Da meſma ſorte a ſomma de todos os angulos EAF, (Fig. 7.) FAB, BAC, CAD, DAE, que ſe podem fazer á roda do ponto A, que lhes ſerve de vertice commum, he igual a 360 gráos, ou a quatro angulos rectos, medidos pela circumferencia inteira BCDEF.

LIX.

Uſo do inſtrumento chamado Semicirculo dimenſorio, para tomar a grandeza de hum angulo.

Depois de termos viſto que os angulos tem as partes do circulo por medida, vejamos como faremos para ſaber quantos gráos conterá hum angulo, que quizermos medir.

Servir-nos-hemos de hum inſtrumento I, (Fig. 8.) chamado Semicirculo dimenſorio: eſte inſtrumento he compoſto de duas regras EAC, DAB, de igual comprimento, que ſe cruzão em A, e que tem humas pinulas nas ſuas extremidades. Huma deſtas regras EC, a que chamam ali-

alidada, he movel á roda de A; e EST. V.
a outra DB he fixa, que ſerve de diametro ao ſemicirculo DCB dividido em 180 gráos, &c.

Ora querendo-ſe ſaber o angulo, que formam duas linhas rectas, tiradas do lugar, em que ſe eſtiver, a dous objectos quaeſquer F, G, póe-ſe primeiramente a regra fixa DAB, de ſorte que o olho poſto em D veja hum dos dous objectos F, pelas duas pinulas D, e B: depois, ſem mover o inſtrumento, ſe mova a alidada, até que o olho poſto em E deſcubra o outro objecto G pelas pinulas E, e C; e então a alidada notará ſobre o ſemicirculo graduado o numero de gráos, minutos, &c. que contiver o angulo propoſto GAF.

LX.

Uſo do Transferidor para fazer hum angulo de hum numero deter-

Querendo-ſe fazer ſobre o papel hum angulo de hum numero determinado de gráos, nos ſerviremos de hum inſtrumento K (Fig. 9.) dividido

EST. V. minado de partes.

do em 180 gráos, chamado Transferidor; e pondo o centro A ſobre a ponta do angulo, que ſe quer traçar, e a linha AB ſobre a linha AG, que ſe toma por hum dos lados do angulo, ſe marque o ponto C, que correſponde ao numero de gráos, que ſe quer dar ao angulo propoſto; depois por eſte ponto, e pelo centro A, tirando a linha ACO, ſe terá o angulo OAG, que conterá o numero de gráos pedido.

LXI.

EST. VI.

Supponhamos agora que tendo-ſe tomado em hum papel a baſe FG, (Eſtampa VI. Fig. 1. e 2.) ſe queira fazer ſobre eſta baſe hum triangulo FGH, ſemelhante ao triangulo ABC, tomado ſobre hum terreno. Para ſabermos o que cada hum dos angulos CAB, CBA conterá de gráos, nos ſerviremos do ſemicirculo; depois por meio do transferidor ſe farão os angulos HFG, e HGF, reſrefpectivamente iguaes aos angulos EST. VI. CAB, e CBA; e então porque o ponto H, no qual fe uniráõ os lados FH, e GH, ficará neceffariamente determinado por efta operação, como tambem o angulo FHG fe terá o triangulo FGH, inteiramente femelhante ao triangulo ABC.

LXII.

Como importa muito que na prática, como diffemos, fejam os angulos exactamente medidos, não nos devemos contentar de os tomar, ainda com os inftrumentos mais perfeitos; he tambem precifo achar o modo de verificar as fuas medidas, para fe fazer a correcção dellas, quando feja neceffario. Ora efte modo he fimples, e facil. Tornemos ao triangulo ABC. Conhecemos que a grandeza do angulo C deve refultar da dos angulos A, e B; porque augmentando-fe, ou diminuindo-fe eftes angulos, a pofição das linhas CA, BC

EST. VI. BC ſe alteraria, e por conſequencia tambem o angulo C, que eſtas linhas entre ſi fazem. Ora ſe o angulo C depende da grandeza dos angulos A, e B, deve-ſe preſumir que o numero de gráos, que os angulos A, e B comprehendem, deve determinar o numero de gráos, que ha de conter o angulo C; e que aſſim poderá ſervir para verificar as operações, que ſe tiverem feito para determinar os angulos A, e B; pois que nos certificaremos de termos medido bem os angulos A, e B, ſe medindo depois o angulo C, ſe lhe achar o numero de gráos, que lhe pertencer relativamente á grandeza dos angulos A, e B.

Para ſe achar como da grandeza dos angulos A, e B ſe póde concluir a do angulo C, examinemos o que a eſte angulo ſuccederia, ſe as linhas AC, BC ſe vieſſem a chegar, ou a apartar huma da outra. Supponhamos, por exemplo, que

BC,

BC, (Fig. 3.) movendo-ſe ao redor do ponto B, ſe aparta de AB para ſe avizinhar a BE, he evidente que em quanto BC ſe moveſſe, o angulo B ſe abriria continuadamente; e que ao contrario o angulo C ſe fecharia cada vez mais; do que logo ſe podia preſumir, que neſte caſo a diminuição do angulo C igualaria a augmentação do angulo B; e que aſſim a ſomma dos tres angulos A, B, C ſeria ſempre a meſma, qualquer que foſſe a inclinação das linhas AC, BC ſobre a linha AE. EST. VI.

LXIII.

Ora eſta inducção preſumida traz a ſua demonſtração comſigo; porque tirando-ſe a recta ID (Fig. 4.) parallela a AC, primeiramente ſe verá que os angulos ACB, e CBD, chamados angulos alternos, ſerão iguaes, o que he evidente; pois que as linhas AC, e IB, ſendo parallelas, ſerão inclinadas igualmente ſobre

Angulos alternos são os angulos, que huma linha recta fórma de

EST. VI. bre CBO; e que assim o angulo IBO igualará o angulo ACB. Mas tambem o angulo IBO igualará o angulo CBD, porque a linha ID não será inclinada sobre CO mais de huma parte, do que da outra: logo o angulo DBC igual ao angulo IBO, igualará o angulo ACB seu alterno.

huma, e outra parte, cahindo sobre duas parallelas.

Estes angulos são iguaes.

LXIV.

Em segundo lugar se verá que o angulo CAE será igual ao angulo DBE, por causa das parallelas CA, e DB. Assim os tres angulos do triangulo se poderiam pôr ao pé huns dos outros, e unidos pelos seus vertices no ponto B, e então se veria que os tres angulos DBE, CBD, e CBA, que igualariam os tres angulos CAB, ACB, CBA, seriam iguaes a dous angulos rectos; (Artigo LVII.) e como tudo o que temos dito se poderá applicar do mesmo modo a qualquer triangulo que se-

ſeja, haverá a certeza deſta proprie- dade geral, que a ſomma dos tres angulos de hum triangulo he conſ- tantemente a meſma, e que ella he igual a dous rectos, ou, o que vem a ſer o meſmo, a 180 gráos.

EST. VI.
A ſomma dos tres angulos de hũ triangulo he igual a dous angulos rectos.

LXV.

Logo para ſe concluir o valor do terceiro angulo de hum triangulo, tendo-ſe medido dous, ſerá preciſo diminuir de 180 gráos o numero de gráos, que os dous angulos tomados juntos tiverem; propriedade, que nos dá hum modo commodiſſimo de verificar a medida dos angulos de hum triangulo, da qual ſe verá huma infinidade de outras utilidades, ſegundo formos adiante. Aqui nos contentaremos de tirar as conſequencias as mais immediatas.

LXVI.

Hum triangulo não póde ter mais do que hum angulo recto; e com mais

EST. VI. mais forte razão não póde ter mais de hum angulo obtuſo.

LXVII.

Se hum dos tres angulos de hum triangulo he recto, a ſomma dos outros dous he ſempre igual a hum recto.

Eſtas duas propoſições são tão claras, que não he preciſo demonſtrallas.

LXVIII.

O angulo exterior de hum triangulo vale os dous angulos interiores oppoſtos.

Prolongando-ſe hum dos lados do triangulo ABC, (Fig. 4.) por exemplo, o lado AB, o angulo exterior CBE ſómente, valerá tanto como os dous angulos interiores oppoſtos BCA, e CAB; porque ſe ao angulo CBA ſe ajuntarem os dous angulos BCA, e CAB, ou o angulo CBE, a ſomma ſerá ſempre igual a 180 gráos, ou a dous angulos rectos. (Artigo LXIV.)

Sa-

LXIX.

Sabendo-se o valor de hum dos angulos de hum triangulo isosceles ABC, (Fig. 5.) sabe-se o dos outros dous. EST. VI.

Tendo-se o angulo do vertice A, he evidente que diminuindo-se o numero de gráos, que este angulo contiver dos 180 gráos, que he a medida dos tres angulos do triangulo, a metade da somma que ficar, será a medida de cada hum dos angulos B, C, tomados sobre a base.

Hum angulo de hum triangulo isosceles dá os outros dous.

Se fosse hum dos dous angulos B, C, tomados sobre a base, que se tivesse reconhecido o dobro do seu valor diminuido de 180 gráos, daria o angulo do vertice A.

LXX.

Como hum triangulo equilatero não he outra cousa senão hum triangulo isosceles, ao qual cada hum dos seus

Os angulos de hum triangulo equilatero são cada hum de 60 gráos.

EST. VI. ſeus lados póde igualmente ſervir de baſe, claro eſtá que os ſeus tres angulos são neceſſariamente iguaes, e que cada hum vale 60 gráos, terço de 180 gráos.

LXXI.

Deſcripção do exagono.

Daqui ſe tira facilmente a deſcripção do exagono, ou polygono de ſeis lados, que tinhamos promettido. (Artigo XXIV.)

Porque para ſe achar huma linha, que reparta a circumferencia em ſeis partes iguaes, ſerá preciſo que eſta linha ſeja a corda de hum arco de 60 gráos, ſexta parte de 360 gráos, valor de toda a circumferencia. Suppondo pois que AB (Figur. 6.) ſeja eſta corda, e do centro I, tirando para as extremidades A, e B, os radios AI, e IB, o angulo AIB valerá 60 gráos; e porque os dous lados AI, e IB ſerão iguaes, o triangulo AIB ſerá iſoſceles. Logo o an-o angulo do centro, ſendo de 60 graós, cada hum dos outros dous angulos valerá tambem 60 gráos, metade de 120. Logo (Artigo LXX.) o triangulo AIB ſerá equilatero. Logo AB igualará o radio do circulo. Do que ſe ſegue, que para deſcrever hum exagono, ſerá preciſo abrir o compaſſo com hum intervallo igual ao radio; e pondo-o ſeis vezes ſucceſſivamente ſobre a circumferencia, teremos os ſeis lados do exagono. EST. VI.

LXXII.

Deſcripto aſſim o exagono ABCDEF, facilmente ſe deſcreverá o dodecagono, ou polygono de doze lados.

A ametade do angulo ao centro do exagono nos dá o angulo ao centro do dodecagono.

Para o que divida-ſe o arco AKB, ou o angulo AIB, em duas partes iguaes; e AK, corda de metade do arco AKB, ſerá hum dos lados do dodecagono.

Pa-

EST. VI.

LXXIII.

Repartir hũ angulo em dous igualmente.

Para ſe repartir o arco AKB em dous arcos iguaes, AK, e KB, ſe fará a meſma operação, como ſe ſe quizeſſe cortar a corda AB em duas partes iguaes; iſto he, que dos pontos A, e B, como centros, e com qualquer intervallo ſe deſcrevam os arcos MLN, OLP; e do ponto L, ſecção dos dous arcos, ſe tire ao centro I a linha LI, a qual dividirá em dous o arco AKB, e a corda AB.

LXXIV.

Deſcripção dos polygonos de 24, 48, &c. lados.

Seguindo-ſe o methodo precedente, e repartindo-ſe o arco AK em dous arcos iguaes, a corda de hum deſtes dous arcos ſerá o lado do polygono de 24 lados. Da meſma ſorte ſe terão os polygonos de 48, 96, 192, &c. lados.

Ago-

EST. VI.

LXXV.

Agora para descrever hum octogono, isto he, hum polygono de 8 lados, se principiará, traçando-se hum quadrado em hum circulo, o que se fará, se depois de se tirarem dous diametros AIB, (Fig. 7.) e CIE, que se cortem em angulos rectos, se ajuntarem as suas extremidades com as linhas AC, CB, BE, AE. Descripção do octogono.

Porque por causa da regularidade do circulo, e da igualdade dos quatro angulos, que formam as perpendiculares AIB, CIE, os quatro lados AC, CB, BE, EA serão necessariamente iguaes, e se acharáõ igualmente inclinados huns sobre os outros, o que não póde convir senão ao quadrado.

Descripto assim o quadrado, se dividirá pelo methodo precedente cada hum dos arcos CKB, BLE, &c. em duas partes iguaes, o que dará o octogono CKBLEMAN.

EST. VI. E dos polygonos de 16 32, &c. lados.

Repartindo-ſe da meſma ſorte cada hum dos arcos CK, KB, &c. em 2, em 4, em 8, &c. partes iguaes, ſe terão os polygonos de 16, 32, 64, &c. lados.

FIM DA PARTE PRIMEIRA.

ELE-

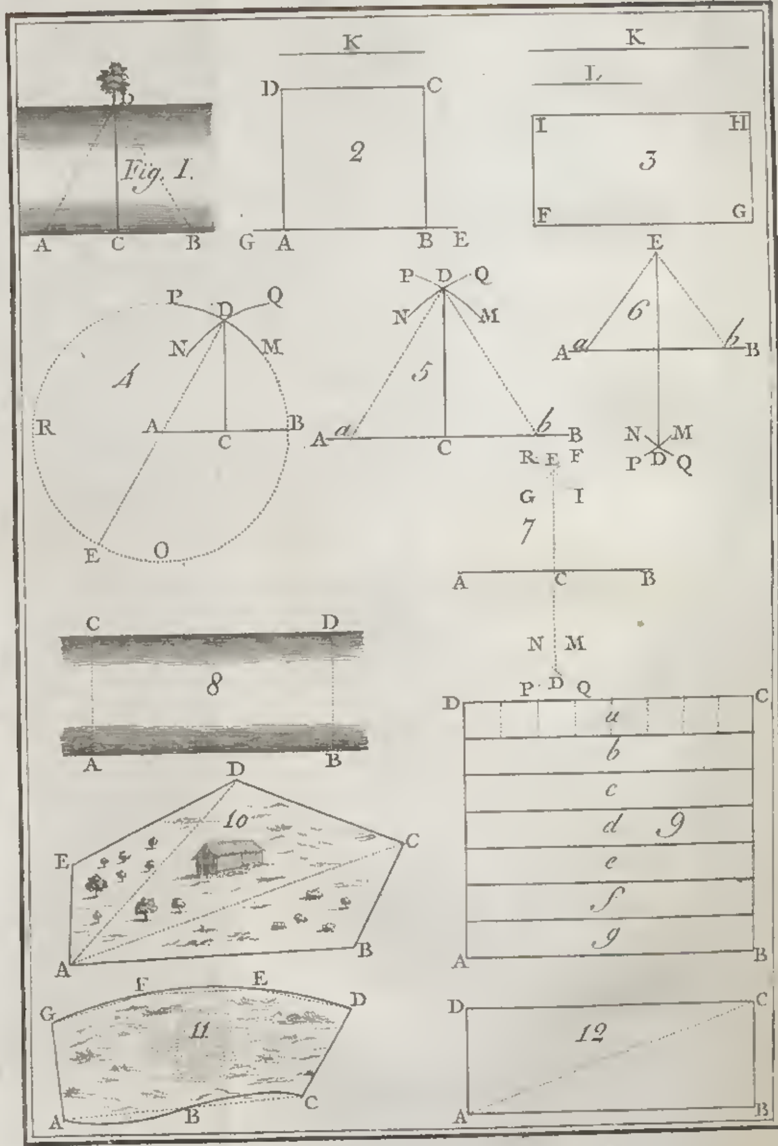
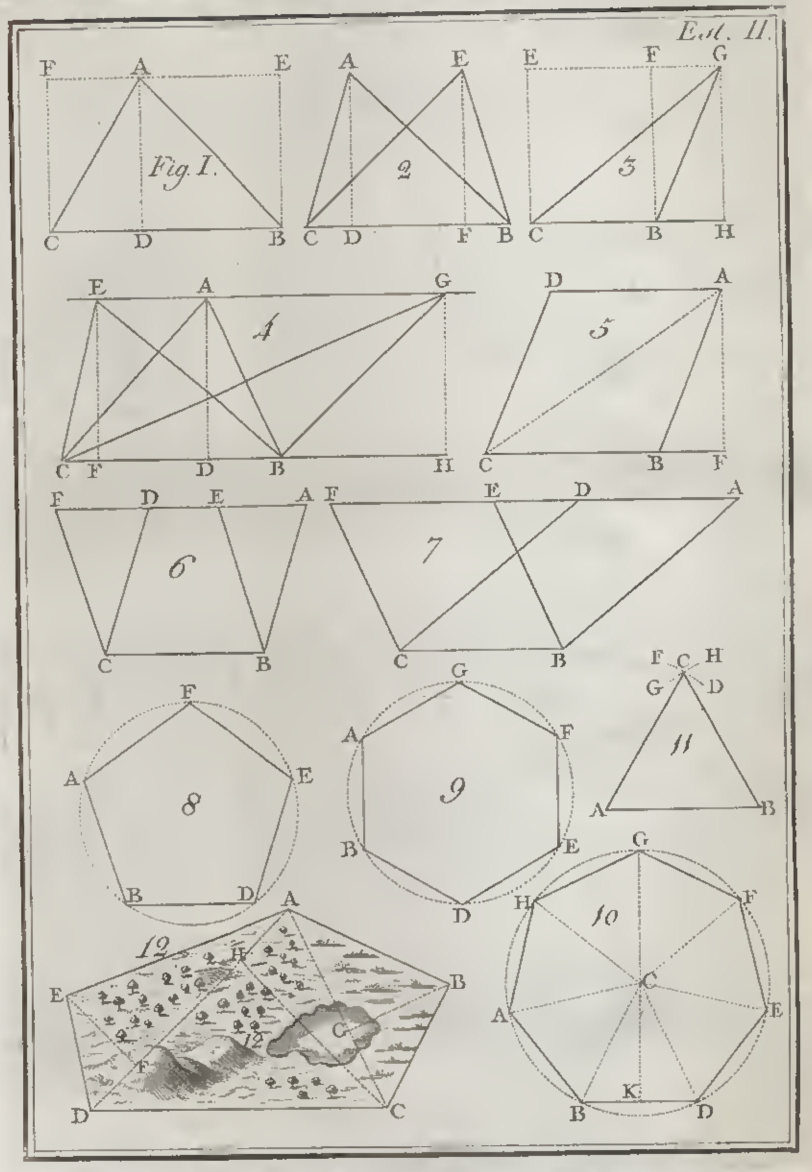
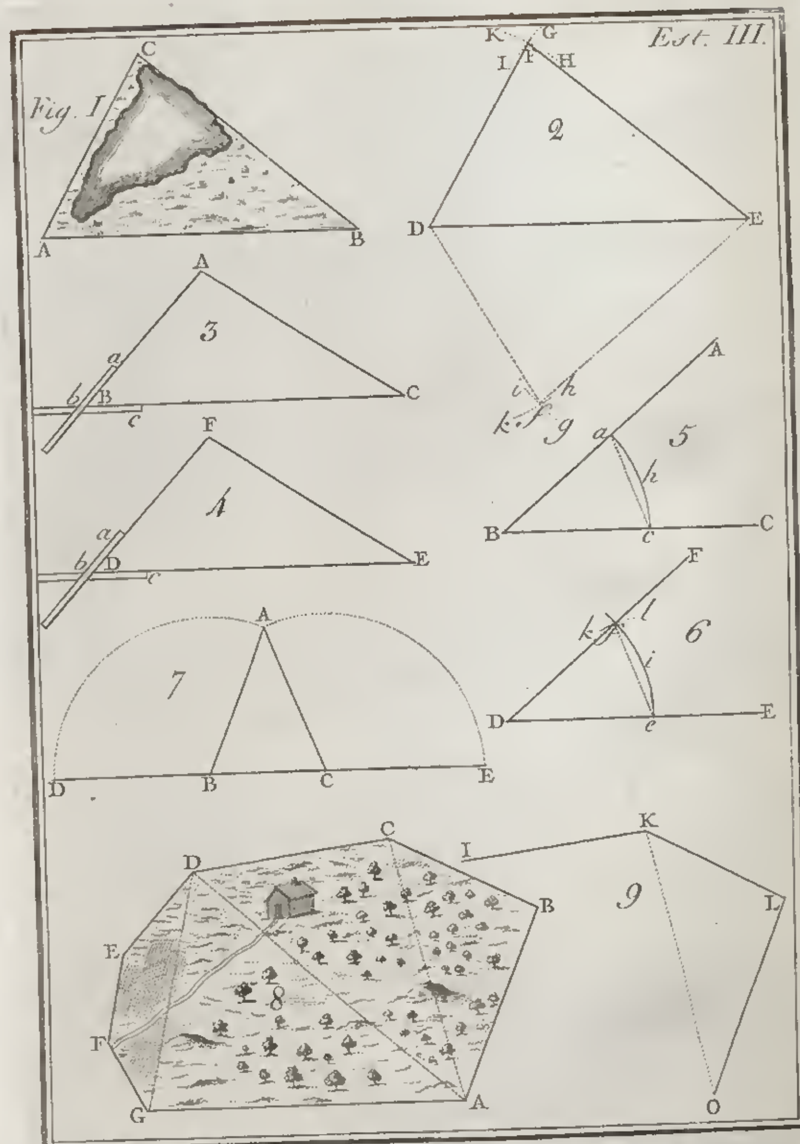
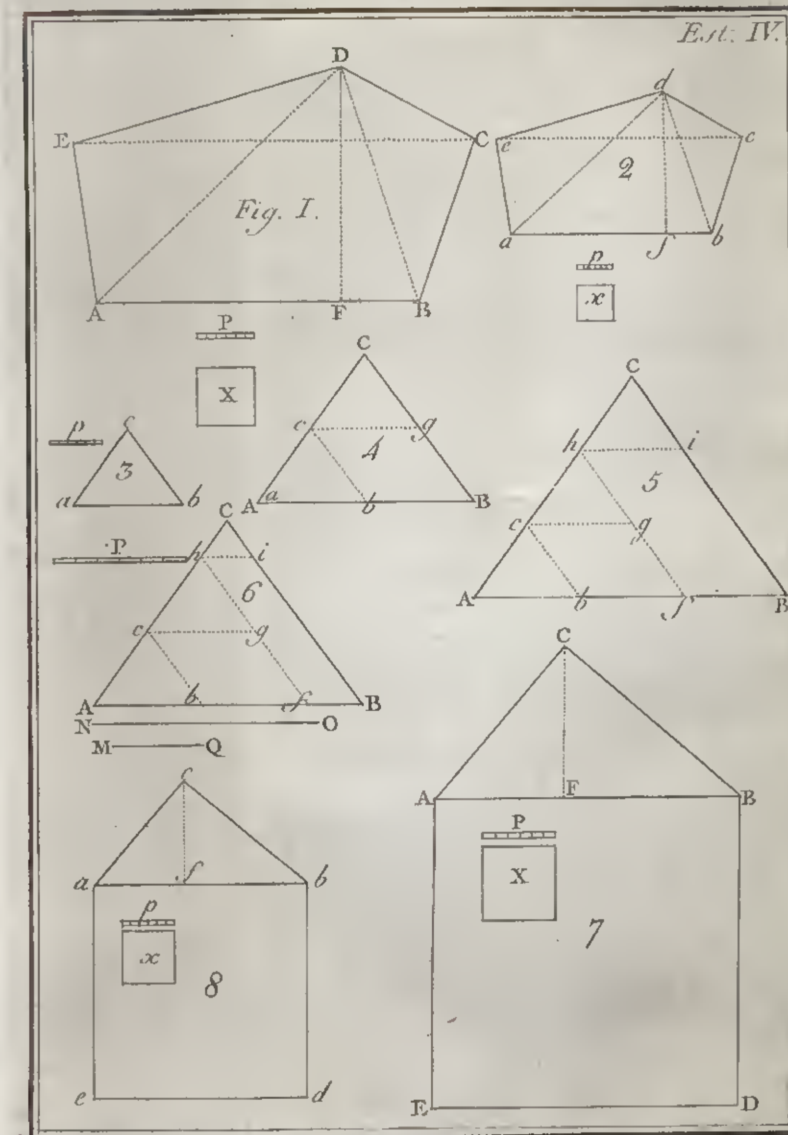
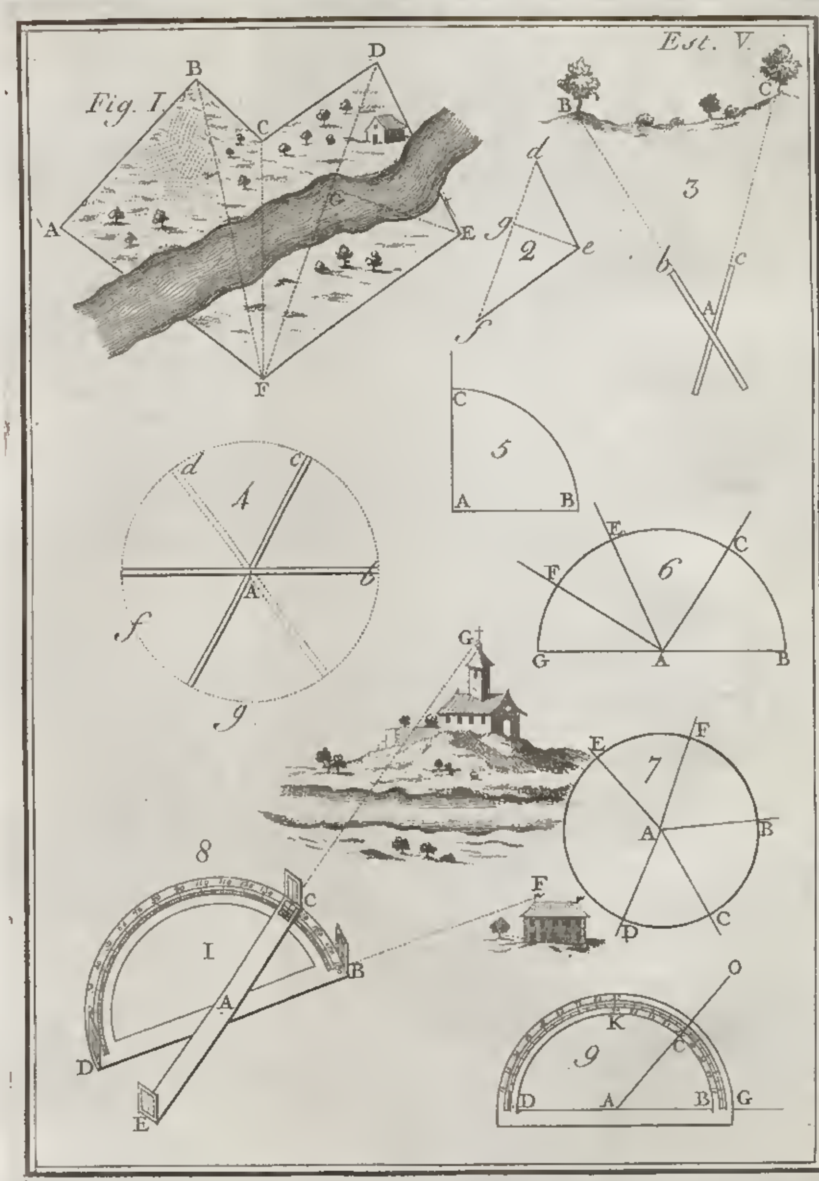


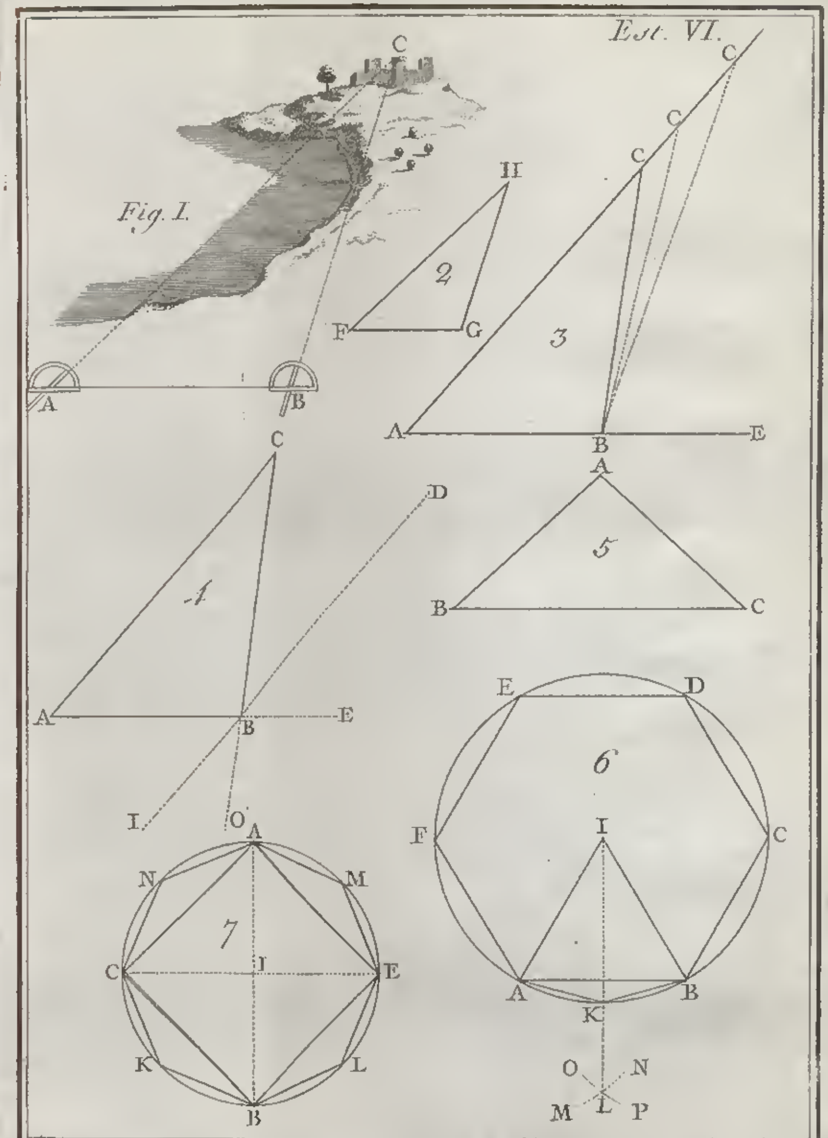
Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


Est. II.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


Est. III.
Fig. I
A
B
C
2
D
E
G
H
I
K
3
a
b
c
4
F
5
h
6
k
l
i
e
7
8
9
L
O


Est: IV.
Fig. I.
D
E
C
A
F
B
P
X
d
e
c
2
a
f
b
p
x
3
4
5
6
7
8
N
O
M
Q


Est. V.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9


Est. VI.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE SEGUNDA.

Do Methodo Geometrico de comparar as Figuras rectilineas.

QUEM reflectisse no que fica dito a respeito do modo, com que se chegou a poder medir os Terrenos, necessariamente devia reparar, que as posições das linhas, respeito humas ás outras, davam materia para fazer observações dignas por si mesmas de attenção, independentemente da utilidade, que dellas podia resultar na prática: e he de presumir, que estas observações obrigáram os primeiros Geometras a passar a mais nos seus descubrimentos; porque não he sómente pela necessidade das cousas, que os homens se determinam a procurallas; muitas vezes a curiosidade he tambem outro grande motivo para os excitar a novos descubrimentos.

O que tambem contribuiria para os progressos da Geometria, he o gosto, que naturalmente se tem da sua exactidão rigorosa, sem a qual o espirito já mais se satisfaz.

Assim quando ao medir das figuras se vio que em huma infinidade de casos os petipés, e semicirculos não davam os valores das linhas, ou dos angulos, senão pouco mais, ou menos, se procuráram methodos, que supprissem ao defeito destes instrumentos.

Aqui tornaremos ás figuras rectilineas; porém nas operações, que fizerzermos para descubrir as suas justas proporções, não nos serviremos senão da regra, e compasso.

Succede muitas vezes que he necessario ajuntar em huma só figura várias outras, que lhe sejam semelhantes; ou desmembrar huma figura em outras da mesma especie; o que se póde fazer, operando logo pelos rectangulos, pois que todas as figuras rectilineas não são senão ajuntamentos de triangulos, e que cada triangulo he metade de hum rectangulo, que tem a mesma altura, e a mesma base.

I.

Para se compararem os rectangulos, he preciso saber reduzir qualquer rectangulo a outro, que tenha a mesma superficie; porém que tenha huma altura differente. Porque quando dous rectangulos se reduzirem a outros dous da mesma altura, elles não differiráõ mais que pelas

las ſuas baſes; o maior ſerá aquelle, que tiver a maior baſe, e elle conterá o mais pequeno, do meſmo modo que a ſua baſe conterá a do mais pequeno rectangulo; o que ordinariamente ſe exprime aſſim: dous rectangulos, que tem a meſma altura, eſtam na meſma razão das ſuas baſes.

Dous rectã-gulos, que tem a meſ-ma altura, eſtam na meſma razão das ſuas ba-ſes.

II.

Para ajuntar eſtes dous rectangulos não ſerá preciſo mais do que pôr hum ao pé do outro.

III.

Nem mais difficil ſerá o diminuir o menor do maior.

IV.

E para repartir hum rectangulo em hum numero determinado de rectangulos iguaes, ſerá preciſo repartir a ſua baſe em hum ſemelhante numero de partes iguaes; depois levanvantar perpendiculares ſobre os pontos de diviſão.

V.

Agora proponha-ſe o reduzir o rectangulo ABCD (Eſtampa VII. Fig. 1.) em outro BFEG, que tenha a meſma ſuperficie, e que ſeja a ſua altura BF, notar-ſe-ha que pois que o ſeu valor ſerá o producto da ſua altura pela ſua baſe, ſerá preciſo que o rectangulo procurado BFEG, cuja altura ſerá maior que BC, tenha a ſua baſe mais pequena que AB; iſto he, que ſe BF, por exemplo, he duplo de BC, ſerá preciſo que BG não ſeja ſenão metade de AB.

EST. VII.

Maneira de reduzir hum rectangulo em outro, que tenha huma altura dada.

Se BF foſſe triplo de BC, BG não ſeria ſenão o terço de AB.

Da meſma ſorte ſe verá que ſe BF, em lugar de conter BC hum numero certo de vezes, o contiveſſe com fracção, como duas vezes, e hum terço, o rectangulo BFEG não poderia ſer igual ao rectangulo AB-

CD,

EST. VII. CD, ſem que a ſua baſe BG foſſe tambem comprehendida duas vezes, e hum terço na baſe AB. E em geral, ſerá facil de ver que a fim de que dous rectangulos ABCD, BFEG ſejam iguaes, ſerá neceſſario que a baſe BG de hum ſeja comprehendida na baſe AB do outro, como a altura BC na altura BF.

Logo não ſerá preciſo mais do que dividir a linha AB, de ſorte que AB ſeja para BG, como BF para BC; o que ſe fará, (Parte I. Artigo XLI.) tirando a linha FA, e do ponto dado C a parallela CG.

VI.

Segunda maneira de reduzir hum rectangulo em outro, cuja altura ſeja dada.

Para ſe reduzir o rectangulo ABCD (Fig. 2.) em outro rectangulo BFEG, que tenha huma altura dada FB, póde-ſe uſar de huma maneira menos natural do que a precedente, porém mais cómmoda. Tendo-ſe prolongado AD até que ella encontre em I a recta FEI, tirada pe-

pelo ponto F, parallelamente a AB, EST. VII.
ſe tirará a diagonal BI; e pelo ponto O, onde ella encontrará o lado DC, ſe tirará GOE parallela a FB, e o rectangulo BFEG ſerá igual ao rectangulo ABCD.

Para o provar baſtará que demonſtremos, que tirando-ſe dos rectangulos ABCD, BFEG a parte commua OCBG, o rectangulo ADOG igualará o rectangulo EOCF.

Ora reflectindo-ſe na igualdade dos dous triangulos IBF, IBA, ſe verá que diminuindo-ſe deſtes triangulos quantidades iguaes, os reſtos ſerão iguaes. Mas o triangulo IAB ſe mudará no rectangulo ADOG, diminuindo-ſe-lhe os dous triangulos IDO, OGB; como tambem o triangulo IBF virá a ſer o rectangulo EOCF, pela diminuição dos dous triangulos IEO, OBC, iguaes aos dous primeiros. Logo os dous rectangulos ADOG, EOCF, reſtos dos dous triangulos, ſerão entre ſi

iguaes,

EST. VII. iguaes, como tambem os rectangulos ABCD, BFEG.

VII.

Demonstra-se rigorosamente, que se dous rectangulos são iguaes, a base do primeiro he para a base do segundo, como a altura do segundo para a altura do primeiro.

Esta segunda maneira de mudar hum rectangulo em outro confirma o principio, que pela primeira se suppõe, o qual poderia parecer não ser fundado, senão em huma simples inducção.

Da igualdade dos dous rectangulos ABCD, BFEG se tinha concluido que era necessario que AB fosse para BG, como BF para BC; o que agora se póde provar pelo Artigo precedente.

Porque os triangulos IAB, e OGB, sendo manifestamente semelhantes, a base AB do grande será para a base GB do pequeno, como altura IA para a altura OG, ou como BF para BC suas iguaes. Logo AB será para BG, como BF para BC, conforme ao principio do Artigo V.

Do

VIII.

Do meſmo modo de que uſámos para demonſtrar, que da igualdade dos rectangulos ABCD, BFEG ſe ſeguia que a altura BF era para a altura BC, como a baſe AB para a baſe BG, ſe demonſtraria tambem, que quando quatro linhas BF, BC, AB, BG forem taes, que a primeira ſeja para a ſegunda, como a terceira para a quarta, o rectangulo, que tiveſſe por altura, e por baſe a primeira, e a quarta deſtas linhas, ſeria igual ao rectangulo, que tiveſſe por altura, e por baſe a ſegunda, e a terceira.

EST. VII.

Se quatro linhas forem taes, que a primeira ſeja para a ſegunda, como a terceira para a quarta, o rectangulo formado pela primeira, e pela quarta ſerá igual ao que ſe formar pela ſegunda, e pela terceira.

IX.

Quando quatro quantidades, aſſim como as linhas precedentes BF, BC, AB, BG, são taes, que a primeira he para a ſegunda, como a terceira para a quarta, ſe diz que eſtas quatro quantidades eſtam em pro-

Quatro quãtidades, das quaes a primeira he para a ſegunda, como a terceira para a quarta, ſe diz que eſ-

EST. VII. tão em proporção, ou que formam huma proporção.

proporção, ou que ellas formam huma proporção, porque 6 he comprehendido em 9, da mesma sorte que 18 he incluido em 27. O mesmo he de 15, 25, 75, 125, &c.

X.

Dos quatro termos de huma proporção, o primeiro, e o quarto se chamam termos extremos, e medios o segũdo, e o terceiro.

A primeira, e a quarta das quatro quantidades de huma proporção se chamam termos extremos, ou simplesmente extremos; a segunda, e a terceira se chamam termos medios, ou simplesmente medios.

Servindo-nos das definições precedentes, he evidente que as proposições comprehendidas nos Artigos VII, e VIII se exprimiráõ deste modo.

XI.

Em huma proporção, o producto dos extremos he igual ao producto dos medios.

Quando quatro quantidades estam em proporção, o producto das extremas he igual ao producto das medias.

Se

XII.

Se quatro quantidades forem taes, que o producto das extremas seja igual ao producto das medias, estas quatro quantidades estarão em proporção.

Se o producto dos extremos he igual ao producto dos medios, os quatro termos formam huma proporção.

XIII.

He necessario reflectir muito nos dous Artigos precedentes, porque são de grande uso: daqui se deduz entre outras cousas a demonstração da Regra, que se chama na Arithmetica a Regra de tres. Para darmos huma idéa desta regra, usemos de hum exemplo, pois he a mais simples maneira de nos explicarmos.

Disto se tira a Regra de tres.

Supponhamos que 24 jornaleiros fizeram 30 braças de obra em hum certo tempo, pergunta-se: Quanta farão 64 jornaleiros em igual tempo?

He evidente que para resolver a quef-

EST. VII. queſtão, he preciſo achar hum numero, que ſeja para 64, na meſma razão de 30 para 24. Ora, ſegundo o que temos viſto, eſte numero ſerá tal, que o ſeu producto por 24 igualará o producto de 30 por 64. Mas ſe o producto de 30 por 64 he 1920, logo o numero procurado ſerá aquelle, que ſendo multiplicado por 24, dará 1920.

Ora por pouca luz, que ſe tenha das operações da Arithmetica, facilmente ſe percebe que eſte numero deve ſer o quociente da diviſão de 1920 por 24, iſto he 80.

Ou a maneira de achar o quarto termo de huma proporção, da qual ſe dem os tres primeiros.

Em geral, para ſe achar o quarto termo de huma proporção, da qual forem dados os tres primeiros, ſerá neceſſario tomar o producto do ſegundo, e do terceiro, e repartir eſte producto pelo primeiro termo da proporção.

XIV.

Hum exemplo tão ſimples, como

o que

o que escolhemos, talvez não faça EST. VII.
bastantemente conhecer a necessidade do Methodo precedente. A boa razão sómente faria achar o numero pedido. Bem se vê que 30 excede hum quarto a 24, e que por isso he necessario que o numero procurado exceda hum quarto a 64, o que nos dá 80. Porém ha casos, nos quaes se poderia gastar muito tempo a procurar a relação dos dous primeiros numeros da proporção.

Por exemplo, quer-se o quarto termo proporcional aos tres numeros 259, 407, 483.

Para este se achar pelo methodo precedente, he necessario multiplicar 483 por 407, e repartir 196581, que he o seu producto, por 259, o que nos dá 759 para o quarto termo procurado.

Se de outra sorte se procurasse este termo, talvez que por tentativas se achasse. Bem se poderia descubrir, por exemplo, que 148, ex-

cef-

EST. VII. cesso de 407 sobre 259, contém quatro setimas partes de 259; que assim era tambem preciso ajuntar a 483 o numero 276, que contém quatro das suas setimas partes; porém a generalidade, e segurança do Methodo precedente nos livra sempre do embaraço das tentativas, que até seriam inuteis em muitos casos.

XV.

Quando houverem dous quadrados para ajuntar, a sua addição se fará da mesma maneira da dos dous rectangulos, pois que os quadrados são rectangulos, cujas alturas, e bases são iguaes. Reduzir-se-ha pois hum dos quadrados, o mais pequeno por exemplo, em hum rectangulo, que tenha o lado do grande por altura, e os dous quadrados não farão mais do que hum rectangulo. Da mesma sorte se poderia dar a altura do quadrado pequeno a ambos, ou qualquer outra á vontade; mas

o que

o que abſolutamente não podiamos deixar de nos propôr, quando ſe quizeſſe reduzir dous quadrados a huma ſó figura, era o fazer hum quadrado igual a outros dous. Problema eſte, de que era facil achar a ſolução ſeguinte. EST. VII.

XVI.

Fazer hum quadrado duplo de outro.

Supponhamos que os dous quadrados ABCD, (Fig. 3.) CBFE, dos quaes ſe quer fazer hum ſó quadrado, ſejam iguaes entre ſi; he facil de perceber, que tirando-ſe as diagonaes AC, e CF, os triangulos ABC, e CBF farão ambos o valor de hum quadrado. Logo tranſportando para baixo de AF os outros dous triangulos DCA, e CEF, ſe fará o quadrado ACFG, o lado do qual AC ſerá a diagonal do quadrado ABCD, e a ſua ſuperficie igualará a dos dous quadrados propoſtos, o que não preciſa de demonſtração.

EST. VII.

XVII.

Fazer hum quadrado igual a outros dous desiguaes.

Supponhamos agora que se queira fazer hum quadrado igual á somma de dous quadrados desiguaes, como ADC *d*, (Fig. 4.) CFE *f*; ou, que vem a ser o mesmo, que se queira reduzir a figura ADFE *f d* em hum quadrado.

Seguindo a idéa do methodo precedente, se procurará se he possivel achar na linha DF algum ponto H, tal,

1.º Que tirando as linhas AH, e HE, e fazendo-se mover os triangulos ADH, EFH á roda dos pontos A, e E, até que elles tomem as posições A *d h*, E *f h*, se ajuntem estes dous triangulos em *h*.

2.º Que os quatro lados AH, HE, E *h*, *h* A sejam iguaes, e perpendiculares huns aos outros.

Ora este ponto H se achará, fazendo DH igual ao lado CF, ou EF; porque da igualdade supposta en-

entre DH, e CF, primeiramente ſe EST. VII.
ſegue, que fazendo-ſe gyrar ADH á roda do ſeu angulo A, de ſorte que ſe lhe dê a poſição A dh, o ponto H chegando a h, eſtará diſtante do ponto C de hum intervallo igual a DF.

Da meſma igualdade ſuppoſta entre DH, e CF ſe ſegue tambem, que HF igualará DC; e que aſſim o triangulo EFH, gyrando á roda de E para tomar a poſição Efh, o ponto H chegará ao meſmo ponto h, diſtante de C, de hum intervallo igual a DF.

Logo a figura ADFEdf ficará reduzida a huma figura de quatro lados AHEh. Não falta mais ſenão vermos ſe os quatro lados ſerão iguaes, e perpendiculares huns aos outros.

Ora a igualdade deſtes quatro lados he evidente, pois que Ah, e hE são os meſmos que são AH, e HE; e a igualdade deſtes dous ulti-

EST. VII. timos ſe tirará de que DH, ſendo igual a CF, ou a FE, os dous triangulos ADH, HEF ſeráõ iguaes, e ſemelhantes.

Não nos reſta ſenão ver ſe os lados das figuras AHE *h* formaráõ angulos rectos; do que facilmente nos certificaremos, notando, que em quanto HAD voltar á roda de A para chegar a *h*A*d*, ſerá preciſo que o lado AH faça o meſmo movimento, que faz o lado AD. Ora o lado AD fará hum angulo recto DA *d*, mudando-ſe em A *d*. Logo o lado AH fará tambem hum angulo recto HA *h*, vindo a ſer A *h*.

Quanto aos outros angulos H, E, *h*, he bem viſivel que elles ſeráõ neceſſariamente rectos; porque não ſerá poſſivel que huma figura terminada por quatro lados iguaes tiveſſe hum angulo recto, ſem que os outros foſſem igualmente rectos.

Se

XVIII.

Se se observar que os dous quadrados ADC*d*, CFE*f* são feitos, hum sobre AD, lado medio do triangulo ADH, e o outro sobre EF, igual a DH, lado menor do mesmo triangulo ADH; e que o quadrado AHE*h*, igual aos outros dous, he descripto sobre o lado maior AH, que ordinariamente se chama a hypothenusa do triangulo rectangulo, se descubrirá esta famosa propriedade dos triangulos rectangulos, que o quadrado da hypothenusa he igual á somma dos quadrados construidos sobre os outros dous lados. EST. VII.

A hypothenusa de hum triangulo rectangulo, he o seu lado maior: e o quadrado feito por este lado, he igual á somma dos quadrados feitos pelos outros dous lados.

XIX.

Logo quando de dous quadrados HDKL, (Fig. 5. e 6.) ABCD se quizer fazer hum sómente, será desnecessario de os pôr hum ao pé do outro para os reduzir a hum só, como se fez no Artigo XVII. Bastará

De donde se tira hum modo simples de reduzir dous quadrados a hũ sómente.

pôr

EST. VII. pôr os ſeus lados AD, DH, (Fig. 7.) de ſorte que elles façam hum angulo recto, e tirar depois a linha AH, porque então eſta linha ſerá o lado do quadrado procurado AHIE.

XX.

Se os lados de hum triangulo rectangulo ſervirem de baſes a tres figuras ſemelhantes, a figura, que ſe fizer ſobre a hypothenuſa, ſerá igual ás outras duas.

Se houveſſe duas figuras ſemelhantes DAFGM, (Fig. 8. e 9.) DHPON, e que ſe propuzeſſe de fazer dellas a terceira igual em ſuperficie ás duas juntas, baſtaria pôr as baſes AD, HD deſtas duas figuras ſobre os dous lados de hum angulo recto ADH, (Fig. 10.) e a hypothenuſa AH do triangulo ADH ſeria a baſe da figura pedida.

Para darmos a razão diſto, conſiderem-ſe os quadrados ABCD, DHKL, AHIE feitos pelas baſes das tres figuras ſemelhantes, e logo ſe verá pelo Artigo XVIII. que o quadrado AHIE ſómente valerá pelos outros dous quadrados ABCD,

DH-

DHKL. Ora as figuras ſemelhantes EST. VII.
ſão entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos. (Parte I. Art. XLVII.) Logo os quadrados ABCD, DHKL, AHIE ſe acham ſer as meſmas partes das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

Do que ſe ſegue que a figura AHQRS valerá tanto, como as outras duas. Supponhamos, por exemplo, que cada hum deſtes quadrados foſſe a metade da figura, em que elle foſſe comprehendido, ninguem duvidaria que a figura AHQRS não foſſe igual ás outras duas, pois que a ſua metade valeria tanto, como as metades das duas figuras DHPON, DAFGM. Da meſma ſorte ſeria, ſe os quadrados ABCD, DHKL, AHIE foſſem terços, quartos, &c. das figuras DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Reduzir varias figuras ſemelhantes

Se ſe propuzeſſe o ajuntar tres, quatro, &c. figuras ſemelhantes; ou, que

EST. VII. a huma sómente.

que vem a ser o mesmo, tres, quatro, &c. quadrados, o methodo seria sempre o mesmo. Querendo, por exemplo, ajuntar tres, far-se-hia primeiramente hum quadrado igual aos dous primeiros; depois a este novo quadrado se lhe ajuntaria o terceiro, e assim se teria hum quadrado igual aos tres quadrados propostos.

XXII.

Do que se segue, que propondo-se de fazer hum quadrado, que seja sinco, seis, &c. vezes maior do que outro, bastaria seguir o methodo precedente para resolver este Problema, e ainda ás avéssas, isto he, para fazer hum quadrado, que fosse sómente a quinta, sexta, &c. parte de hum quadrado proposto; o que simplesmente demandaria o lembrar-se do modo de achar a quarta proporcional a tres linhas dadas; porém na terceira Parte desta Obra daremos hum methodo mais directo,

e mais

e mais commodo para resolver esta EST. VII.
sorte de Problemas.

XXIII.

A addição das figuras semelhantes serve para huma prova decisiva da necessidade de se abandonarem os petipés, quando se querem fazer as operações de hum modo, que se possa demonstrar rigorosamente.

Supponhamos, por exemplo, que se tivesse para fazer hum quadrado duplo de outro; aquelles, que não soubessem o methodo dado no Artigo XVI. se haveriam nisto verisimilmente da maneira seguinte.

Dividiriam o lado do quadrado, que lhes dessem em hum grande numero de partes, em 100 partes por exemplo; depois multiplicando 100 por 100, achariam 10000 para o valor do quadrado, o que daria 20000 para o do quadrado pedido.

Porém do valor deste não tirariam o modo de o descrever; seria preciso que tivessem o seu lado ex-

EST. VII. exprimido por hum numero, e que este numero fosse tal, que multiplicado por si mesmo, isto he, quadrando-o, o producto désse 20000.

O producto, que resulta da multiplicação de hũ numero por si mesmo, he o quadrado deste numero.

Ora este numero, de que elles precisavam, em vão o procurariam em hum petipé, cujas partes fossem centesimas do lado do primeiro quadrado; porque 141 multiplicado por si mesmo, daria 19881; e 142 daria 20164; o que se apartaria de huma, e outra parte do numero, que elles deviam achar.

Talvez cuidariam que repartindo o lado do quadrado proposto em mais de 100 partes, achariam hum numero determinado destas partes para o lado do quadrado duplo do primeiro; mas por mais provas que fizessem, sempre achariam que em vão procuravam dous numeros, hum dos quaes exprimisse o lado; ou, segundo a linguagem ordinaria, a raiz de hum quadrado, e o outro o lado, ou a raiz do quadrado duplo.

A raiz de hum quadrado he o numero, que multiplicado por si mesmo, dá o quadrado.

Com

XXIV.

Com effeito na Arithmetica ſe demonſtra que ſe dous numeros não são multiplices hum do outro, iſto he, ſe hum não contém o outro hum numero certo de vezes, o quadrado do maior nem por iſſo ſerá multiplice do quadrado do mais pequeno. Aſſim 5, por exemplo, não ſe podendo repartir exactamente por 4, o ſeu quadrado 25 tambem ſe não poderá repartir por 16 quadrado de 4.

Hum numero he multiplice de outro, quando elle o contém varias vezes exactamente.

Aſſim quadrando-ſe dous numeros, hum dos quaes ſeja maior do que o outro; e que não obſtante ſeja menor do dobro delle, ſahiráõ por eſta operação outros dous numeros, hum dos quaes ſerá menor do que o quadruplo do outro; porém ſem que poſſa ſer duplo, nem triplo. Logo ainda que ſe divida o lado de hum quadrado em tal numero de partes que ſe quizer, o lado do quadrado duplo, que, ſegundo o que

ſe

EST. VII. ſe demonſtrou no Artigo XVI, ſerá a diagonal deſte quadrado, não conterá hum numero exacto deſtas meſmas partes; o que na linguagem dos Geometras ſe exprimiria, dizendo, que o lado do quadrado, e a ſua diagonal são incommenſuraveis.

O lado de hum quadrado, e a ſua diagonal são incommenſuraveis.

XXV.

Outras linhas incommenſuraveis.

Tambem ſe póde notar que ha muitas outras linhas, que não tem alguma medida commua.

Porque eſcrevendo-ſe as duas ſeries
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
a primeira das quaes exprime os numeros naturaes, e a outra os ſeus quadrados, ſe verá que aſſim como os numeros, que eſtiverem entre 4, e 9, entre 9, e 16, entre 16, e 25, &c. não terão alguma raiz, aſſim tambem os lados de dous quadrados, hum dos quaes ſeja triplo, ou quintuplo, ou ſextuplo, &c. do outro, ſerão entre ſi incommenſuraveis.

De

XXVI.

De ferem varias linhas incom- EST. VII.
menfuraveis com outras, poderia nafcer alguma fufpeita fobre a exactidão das propofições, que nos ferviráõ para provar a proporcionalidade das figuras femelhantes. Já fe vio que ao comparar eftas figuras (Parte I. Artigo XXXIV, e fegg.) fempre fuppuzemos que ellas tinham hum petipé, que igualmente podia fervir para fe medirem todas as fuas partes, cuja fuppofição parece que agora fe devia limitar por conta do que affima differnos. He precifo pois que tornemos atrás, e que examinemos fe as noffas propofições, para ferem certas, neceffitam por fi mefmas de algumas modificações.

XXVII.

Tornemos ao que fe diffe no Artigo XXXIX. da primeira Parte, e vejamos fe he exactamente verdade que

EST. VII. que os triangulos taes como *a b c* (Fig. 11. e 12.) ABC, cujos angulos são os mesmos, tenham os seus lados proporcionaes. Supponhamos, por exemplo, que a base do primeiro seja *a b*, e a do segundo huma recta AB, igual á diagonal de hum quadrado, que tenha por lado *a b*, e nesta supposição investiguemos se a proporção de AC para *a c* será como a de AB para *a b*.

Ainda que, segundo o que temos visto, por maior que fosse o numero de partes, que arbitrariamente se suppuzessem em *a b*, AB, já mais poderia comprehender hum numero certo destas partes; he não obstante facil de perceber, que quanto este numero for maior, mais AB se approximará a ser medido exactamente pelas partes de *a b*. Supponhamos *a b* dividido em 100 partes; o que AB comprehenderá destas partes, se achará entre 141, e 142. (Artigo XXIII.) Contentemonos

nos das 141, e deixemos o pequeno resto. Claro está (Parte I. Artigo XXXIX.) que AC conterá tambem 141 das partes de *a c*. EST. VII.

Supponhamos depois *a b* repartido em 1000 partes, o que AB conterá das partes de *a b*, será entre 1414, e 1415: tomemos sómente as 1414, e deixemos tambem o resto; achar-se-ha da mesma sorte que AC conterá 1414 das millesimas partes de *a c*; e que em geral AC conterá sempre tantas partes de *a c* com hum resto, como AB conterá das partes de *a b* com hum resto.

Demais, estes restos, como temos observado, serão de huma, e outra parte tanto mais pequenos, quanto o numero das partes de *a b* for maior. Logo será permittido de os abandonar, imaginando-se a divisão de *a b* levada até o infinito; e poder-se-ha então dizer, que o numero de partes de *a c*, que AC comprehender, igualará o numero de par-

EST. VII. partes de *a b*, que AB contiver; e que aſſim AC ſerá para *a c*, como AB para *a b*.

Os triangulos, e as figuras ſemelhantes tem os ſeus lados proporcionaes, ainda quando eſtes lados são incommenſuraveis.

Temos pois rigoroſamente demonſtrado, que quando dous triangulos tem os meſmos angulos, elles tem os ſeus lados proporcionaes, ſeja que os ſeus lados tenham huma medida commua, ou que a não tenham.

A propoſição (Part. I. Art. XLV.) donde ſe tira a proporcionalidade das linhas, que correſpondem humas ás outras nas figuras ſemelhantes, da meſma ſorte ſe juſtificaria.

XXVIII.

E eſtas figuras são ſempre entre ſi, como os quadrados

Com razões ſemelhantes ſe verá, que as propoſições explicadas nos Artigos XLIV, e XLVII. da primeira Parte, onde ſe demonſtrou que as áreas dos triangulos, e das figuras ſemelhantes tem entre ſi a meſma proporção, que tem os quadrados dos ſeus lados homologos,

são

são fempre em geral verdadeiras, ainda quando os lados deftas figuras são incommenfuraveis. EST. VII. dos feus lados homologos.

Tomemos por exemplo os triangulos femelhantes ABC, *a b c*, dos quaes fupporemos as alturas incommenfuraveis com as fuas bafes; nefte cafo não haverá quadrado algum, por pequeno que feja, que poffa fervir de medida commua a eftes triangulos, e aos quadrados feitos fobre as fuas bafes; ifto he, as áreas *a b c*, e *a b d e* ferão entre fi incommenfuraveis; como tambem as áreas ABC, e ABDE; porém não ferá menos certo, que o triangulo ABC ferá para o quadrado ABDE, como o triangulo *a b c* para o quadrado *a b d e*.

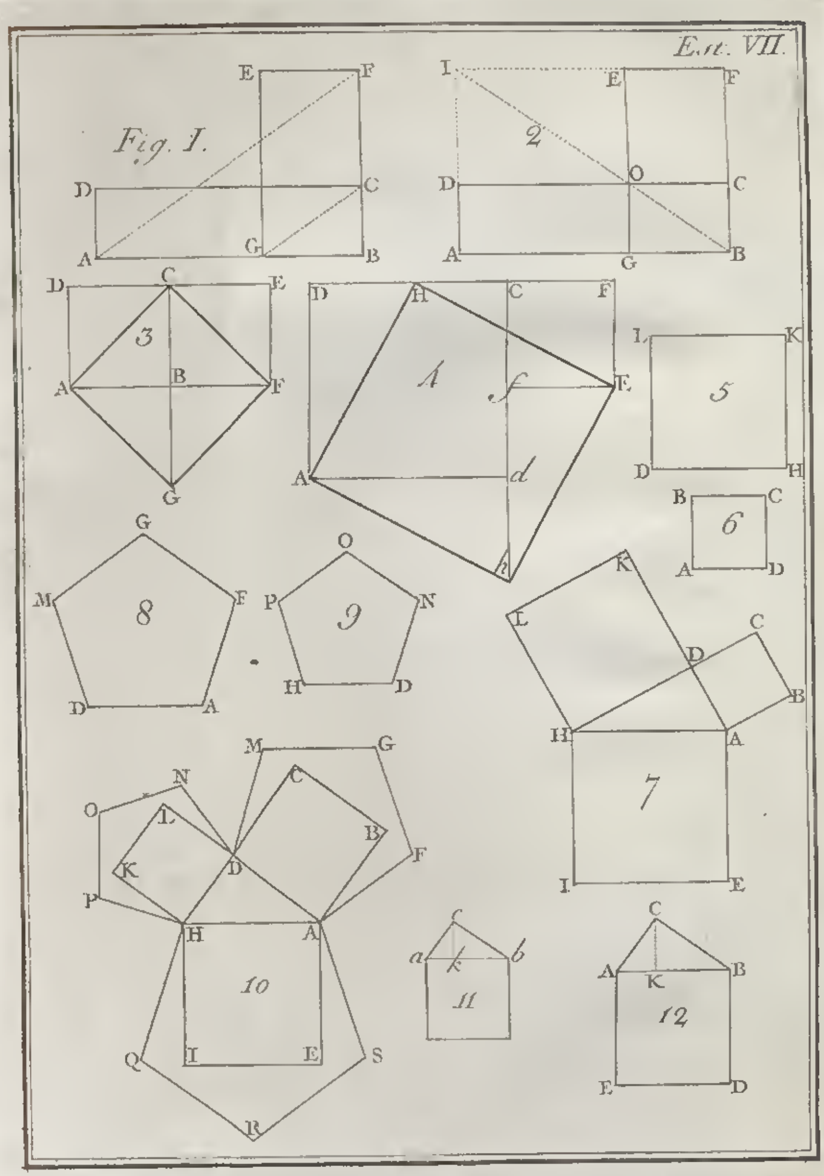
Do que nos certificaremos, obfervando que quanto mais fe fuppuzerem fer pequenas as partes do petipé, de que nos fervirmos para medir AB, e CK, tanto mais nos approximaremos a ter os numeros, que

EST. VII. exprimiráõ a proporção de ABC para ABDE. Logo dividindo sempre o petipé do triangulo *a b c* no mesmo numero de partes, e abandonando os restos, se verá que os mesmos numeros serviráõ sempre para exprimir a razão do triangulo ABC para o quadrado ABDE, e a do triangulo *a b c* para o quadrado *a b d e*. Imaginemos que a divisão dos petipés seja infinita, e ver-se-ha que os restos viráõ a ser absolutamente nada; e poder-se-ha dizer, que os numeros, que exprimirem a razão do triangulo *a b c* para o quadrado *a b d e*, exprimiráõ tambem a razão do triangulo ABC para o quadrado ABDE; e que da mesma sorte o triangulo *a b c* será para o quadrado *a b d e*, como o triangulo ABC para o quadrado ABDE.

O mesmo será de todas as mais figuras semelhantes.

FIM DA PARTE SEGUNDA.

ELE-


Est. VII.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE TERCEIRA.

Da medição das Figuras circulares, e das suas propriedades.

DEpois de se ter chegado a medir toda a sorte de figuras rectilineas, se quiz tambem ter o modo de determinar aquellas, que se limitam em linhas curvas. Os terrenos, e em geral os espaços, que se intentam medir, não são sempre terminados por linhas rectas.

Muitas vezes as figuras curvilineas, e as figuras mixtilineas, isto he, aquellas, que são terminadas por linhas rectas, e por linhas curvas, se podem reduzir a figuras inteiramente rectilineas, como já dissemos; porque havendo para se medir huma figura tal, como ABCDEFG, (Estampa VIII. Fig. 1.) se poderia tomar o lado AD por hum ajuntamento de duas, tres, &c. linhas rectas; e substituindo depois a recta FD á curva FDE, se teria a figura rectilinea ABCDEFG, a qual differiria tão pouco da figura mixtilinea, que se poderia tomar huma por outra sem erro sensivel.

EST. VIII.

Operar-se-hia pois sobre estas figuras, segundo os methodos precedentes. Mas os Geometras de nenhuma maneira se accommodariam com esta sorte de operações: elles querem sómente as que são rigorosas. Demais, ha taes casos, em que a transformação de huma figura curvi-

vilinea, ou mixtilinea, em huma fi- EST. VIII.
gura inteiramente rectilinea, demandaria que se repartisse o seu contorno em tão grande numero de partes, que então o methodo commum sería impraticavel; e ninguem se tentaria a seguillo, tendo para medir hum espaço tal como Z, (Fig. 7.) ou o circulo inteiro X; (Fig. 3.) sería preciso seguir outro methodo para se achar a medida de taes espaços. Aqui sómente trataremos daquelles, que tem os seus contornos terminados por arcos de circulo.

I.

Supponhamos que haja para medir a área do circulo X. (Fig. 3.) Observe-se, que inscrevendo-se-lhe hum polygono regular ABCDE, &c. quantos mais lados este polygono tiver, mais se approximará a ser igual ao circulo. Ora temos visto que a área desta figura (Parte I. Art. XXII.) he igual a tantas vezes o produ-

EST. VIII. ducto do lado BC por a metade do apothêma AH, como o polygono tem de lados; ou, que he o mesmo, que esta área tem por medida o producto do contorno inteiro BCDE, &c. por metade do apothêma. Logo, pois que levando até o infinito o numero dos lados do polygono, a sua área, o seu contorno, o seu apothêma igualaráõ a área, o contorno, e o radio do circulo; a medida do circulo será o producto da sua circumferencia por a metade do seu radio.

A medida do circulo he o producto da sua circumferẽcia por ametade do seu radio.

II.

A área do circulo he igual a hum triangulo, que tem por altura o radio, e por base huma recta igual á circumferẽcia.

Do que se segue, que a superficie de hum circulo BCD (Fig. 4.) he igual á de hum triangulo ABL, a altura do qual sería o radio AB, e a base huma recta BL igual á circumferencia.

III.

Não se trata pois senão de ter o ra-o radio, e a circumferencia. A respeito do radio, este he facil de medir; porém não he o mesmo da circumferencia: não obstante para se ter a sua medida, póde-se envolver o circulo com hum fio, o que em muitas occasiões he sufficiente para a prática. EST. VIII.

Porque até agora não se pode chegar a medir geometricamente a circumferencia do circulo, isto he, a determinar a razão, que ella tem com o seu radio. Acha-se esta razão perto de centenas de milhares de milhares, e até se lhe approxima quanto se quer, sem que ella com isto se possa determinar rigorosamente.

IV.

A approximação mais simples, que se tem achado, he a que temos de Archimedes. Tendo o diametro 7 partes, o que a circumferencia contém destas partes, he entre 21, e

Tendo o diametro 7 partes, a circumferencia tem perto de 22.

EST. VIII. e 22; e ſabe-ſe que ella ſe approxima muito mais a 22, do que a 21.

V.

As circumferencias dos circulos são entre ſi como os ſeus radios.

No mais he evidente, que ſe certamente ſe ſoubeſſe a razão, que huma ſó circumferencia tem com o ſeu radio, ſe ſaberia a de todas as mais circumferencias com os ſeus radios, devendo eſta razão ſer a meſma em todos os circulos. Eſta propoſição parece tão ſimples, que não ha neceſſidade de a demonſtrar; pois ſe vê que quaesquer que foſſem as operações, que ſe fizeſſem para medir huma circumferencia, ſervindo-ſe das partes do ſeu radio, ſería preciſo que ſe fizeſſem as meſmas para medir qualquer outra circumferencia, e que aſſim ſe lhe acharia o meſmo numero de partes do ſeu radio.

VI.

He evidente que os circulos tem tam-

EST. VIII.

tambem a propriedade geral de todas as figuras ſemelhantes; (Parte I. Art. XLVII.) quero dizer, que as ſuas ſuperficies eſtam na meſma proporção, em que eſtam os quadrados dos ſeus lados homologos; mas como para ſe applicar eſta propoſição aos circulos ſe não poderáõ tomar os ſeus lados, ſerá preciſo ſervirmo-nos dos radios, e então ſe verá que os circulos terão as ſuas áreas proporcionaes aos quadrados dos ſeus radios.

As áreas dos circulos são proporcionaes aos quadrados dos ſeus radios.

Se á primeira viſta parecer que eſta propoſição ſe não deve deduzir do que diſſemos no Artigo XLVII. da primeira Parte, e ſe queira huma particular demonſtração, ſe note, que abſolutamente viria a ſer o meſmo a comparação das áreas dos dous circulos BCD, (Fig. 4. e 5.) EFG, ou as dos triangulos ABL, AEM, que lhes ſeriam iguaes, (Art. II.) ſuppondo que as ſuas baſes BL, e EM foſſem deſenvolvidas das circum-

EST. VIII. cumſerencias BCD, e EFG, e que as ſuás alturas foſſem os radios AB, e AE. Ora ſegundo o precedente Artigo, eſtes triangulos ſeriam ſemelhantes. Logo as ſuas áreas eſtariam na meſma proporção, em que eſtam os quadrados dos ſeus lados homologos AB, AE, radios dos circulos BCD, e EFG. Logo, &c.

VII.

Os circulos, por cauſa da ſua ſemelhança, terão tambem, como as figuras ſemelhantes, eſta propriedade, que tomando os tres lados de hum triangulo rectangulo como radios, para com elles ſe deſcreverem tres circulos, aquelle circulo, a que a hypothenuſa ſervir de radio, igualará os outros dous circulos tomados juntamente.

De tres circulos, a que ſervirem de radios os tres lados de hum triangulo rectangulo, aquelle, de que for radio a hypothenuſa, valerá tanto, como os outros dous.

Aſſim ſe poderá ſempre fazer hum circulo igual a dous circulos dados, e iſto ſem ſe tomar o trabalho de medir cada hum dos circulos.

los. Queira-se, por exemplo, fazer hum tanque, que contenha em si tanta agua, como outros dous, tendo a mesma profundidade; ou se queira achar a abertura de hum cano de fonte, pelo qual passe tanta agua, como por dous canos dados, sem trabalho se conseguiria isto, seguindo o caminho, que temos indicado. EST. VIII.

VIII.

Havendo para medir a superficie de huma coroa V, (Fig. 6.) figura comprehendida entre dous circulos concentricos EFG, BCD, isto he, entre dous circulos, que tivessem ambos hum centro commum, o que logo nos occorreria, sería o medir separadamente as superficies dos dous circulos, e diminuir a mais pequena da maior. Mas he facil de perceber, que se póde resolver o problema de huma maneira mais commoda para a prática.

Huma coroa he o espaço comprehendido entre dous circulos concentricos.

Ima-

EST. VIII. Imaginemos hum triangulo ABL, que tenha o radio AB por altura, e a ſua baſe a recta BL igual á circumferencia BCD. Tirando-ſe pelo ponto E a recta EM parallela a BL, eſta recta ſerá igual á circumferencia EFG; porque pela ſemelhança dos triangulos AEM, ABL haverá a meſma proporção entre AB, e BL, que houver entre AE, e EM. Ora por ſuppoſição, BL igualará a circumferencia, da qual AB ſerá radio: logo EM igualará tambem a circumferencia, da qual ſerá radio a linha AE, parte de AB. O meſmo ſería de qualquer outra linha KI, parallela a BL, a qual ſería ſempre igual á circumferencia, da qual foſſe radio AK.

Da igualdade ſuppoſta entre a circumferencia EFG, e a recta EM ſe ſegue neceſſariamente a igualdade do triangulo AEM com o circulo EFG: logo he preciſo que o eſpaço rectilineo EBLM ſeja igual á

co-

EST. VIII.

coroa propoſta V. Ora eſte eſpaço EBLM póde-ſe facilmente reduzir ao rectangulo EBPH, cortando ML em duas partes iguaes MI, e IL, e tirando pelo ponto I ſobre BL a perpendicular HIP, a qual dará o triangulo accreſcentado MHI, igual ao triangulo diminuido PLI.

Logo ſe pelo ponto I ſe tirar a BL a parallela IK, que cortará EB em duas partes iguaes, a coroa propoſta igual ao eſpaço EBLM, ou a EBPH, terá por medida o producto de EB por KI, de cuja circumferencia ſerá radio AK.

Para ſe ter a medida de huma coroa, he neceſſario multiplicar a ſua groſſura pela circumferencia media.

Logo para ſe medir a coroa V, he neceſſario multiplicar a ſua groſſura EB pela circumferencia KOQ, chamada media, entre as circumferencias BCD, e EFG, porque ella excede a pequena circumferencia EFG, ou a recta EM na quantidade MH, igual a PL, quantidade, de que ella he excedida pela grande circumferencia BCD, ou pela recta BL.

Tra-

IX.

EST. VIII.

Tratando-ſe de ſe medir huma figura Y, (Fig. 2.) compoſta de arcos de differentes circulos, e de linhas rectas, ou huma figura Z, (Fig. 7.) compoſta unicamente de arcos de circulos, toda a difficuldade ſe reduz a medir ſegmentos de circulos, iſto he, a eſpaços taes, como ABCE, (Fig. 8.) terminados pelo arco ABC, e pela corda AC. Porque as figuras inteiramente compoſtas de arcos de circulos, ou de arcos, e linhas rectas, todas ſe podem conſiderar como figuras rectilineas, augmentadas, ou diminuidas de certos ſegmentos.

O ſegmento de circulo he hum eſpaço terminado por hum arco, e pela ſua corda.

A medição de todas as figuras circulares ſe reduz áquella do ſegmento.

X.

A medida de qualquer ſegmento ABCE (Fig. 8.) he facil de ſe achar, quando ſe ſabe a do circulo; porque tirando-ſe as linhas AT, CT ao centro T do arco, ſe formará huma ma figura ABCT, chamada ſector, cuja área ſerá para o circulo, como o arco ABC para toda a circumferencia; e por conſequencia terá por medida o producto de ametade do radio AT pelo arco ABC. Ora tendo-ſe determinado o ſector, não ſerá preciſo mais do que diminuir-lhe o triangulo ACT para ſe ter o ſegmento ABCE.

EST. VIII. O ſector he huma porção de circulo terminada por dous radios, e pelo arco, que elles cõprehendem. A ſua medida he a do ſegmento.

XI.

Como ſuccede muitas vezes, que quando ſe propõe de medir huma figura tal como Y, (Fig. 2.) não ſe tem o centro do arco HIK, e que ſem eſte centro não ſe poderia medir a figura, pois que o methodo precedente requer o conhecimento do radio, he preciſo que ſaibamos procurar o centro de hum arco de qualquer circulo.

Seja ABC (Fig. 9.) o arco de circulo propoſto; ſe ſobre eſte arco ſe tomarem dous pontos á vontade

Achar o centro do arco de qualquer circulo.

A,

EST. VIII. A, e B; e que deftes pontos, como centros, fe defcreverem os quatro arcos *goi*, *foh*, *lpk*, *mpn*, os dous primeiros, com qualquer radio, e os dous fegundos com o mefmo radio, ou qualquer outro que fe quizer, he evidente que o centro procurado do arco ABC ferá na linha *op*, tirada pelos pontos das interfecções *o*, *p*.

Efcolhendo-fe depois o terceiro ponto C no arco ABC, e fervindo-fe de B, e de C, da mefma forte que fe fez de A, e de B, fe terá a recta *qr*, na qual fe achará o centro pedido. Logo efte centro ferá o ponto de encontro T das linhas *op*; *qr*.

XII.

Da mefma forte, qualquer fituação, que fe der a tres pontos, com tanto que não fiquem em linha recta, fe poderá fempre fazer paffar por elles hum arco de circulo, ou, que

que vem a ſer o meſmo, qualquer EST. VIII.
que ſeja a proporção dos lados AC, BC de hum triangulo ABC (Fig. 10.) com a ſua baſe, ſe poderá ſempre circumſcrever hum circulo a eſte triangulo.

XIII.

O methodo, que acabamos de dar, para circumſcrever hum circulo a hum triangulo, ſendo ſucceſſivamente applicado a differentes triangulos ACB, AEB, AGB (Fig. 11.) mais, ou menos elevados a reſpeito da baſe delles AB, muito bem ſe percebe, que em paſſando de hum triangulo ACB, cujo angulo do vertice he muito agudo, a outros triangulos AEB, AGB, que tem os angulos dos ſeus vertices mais abertos, o centro do circulo circumſcrito ſe avizinha continuadamente para AB, e que eſte centro paſſa depois para baixo de AB, quando o angulo do vertice AGB chega a huma

K

EST. VIII. ma certa abertura. Ora vendo-se passar este centro para baixo de AB, depois de se ter visto por sima, parece-me que deve vir ao pensamento o procurar de qual especie he o triangulo AFB, (Fig. 12.) quando o circulo circumscrito tem o seu centro sobre AB.

Para se conhecer este triangulo AFB, se principiará notando, que neste caso particular a porção de circulo circumscrito a hum triangulo, deve ser exactamente hum semicirculo: com effeito o centro do circulo devendo estar sobre a base AB, a qual tem por supposição as duas extremidades na circumferencia, o centro M não poderá deixar de estar situado precisamente no meio de AB, de sorte que AB será necessariamente hum diametro.

Se de qualquer ponto da circumferencia de hum semicirculo se ti-

Ver-se-ha depois, que tirando-se as linhas FA, FB de qualquer ponto F do semicirculo, o angulo AFB será recto. Porque tirando FM,

os

os dous triangulos AFM, MFB ſe-rão iſoſceles. Logo os dous angulos AFM, MFB ſerão reſpectivamente iguaes aos angulos FAM, FMB; ou, que vem a ſer o meſmo, o angulo total AFB igualará a ſomma dos dous angulos FAM, FBM; porém os tres angulos AFB, FAM, FBM, todos juntos, valem dous rectos. Logo o angulo AFB ſerá recto.

EST. VIII. rarem duas rectas ás extremidades do diametro, ſe terá hum angulo recto.

Aſſim deſcrevendo-ſe na baſe AB hum triangulo rectangulo, qualquer que ſeja, eſte triangulo terá a propriedade pedida de ſer inſcrito em hum circulo, cujo centro eſteja na baſe.

XIV.

Eſta propriedade do circulo de que o angulo, que tem o ſeu vertice na ſemicircumferencia, e que aſſenta ſobre o diametro, he ſempre recto, nos conduz a procurar ſe as outras partes do circulo terão algu-

 ma

ma propriedade analoga ; ſe , por
EST. IX. exemplo, os angulos ACB, (Eſtampa IX. Fig. 1.) AEB, AFB, tomados em hum ſegmento ACEFB, ſeriam todos entre ſi iguaes, como o são aquelles do ſemicirculo.

Para nos certificarmos diſto, principiaremos procurando o valor de hum deſtes angulos, e depois veremos ſe cada hum dos outros tem o meſmo valor. Tomemos, por exemplo, o angulo AEB, (Fig. 2.) o vertice do qual E eſtá no meio do arco AEB. Como a linha EDG, que paſſa pelo centro D, reparte eſte angulo em duas partes iguaes, baſtará medir o angulo AEG, ſua metade; ou, o que he o meſmo, baſtará ſaber-ſe qual parte he o angulo AEG, de hum angulo já medido, tal como ADG; digo pois, que o angulo ADG já eſtá medido, porque nós ſabemos que o arco AG he a ſua medida. (Part. I. Art. LII.)

Fazendo-ſe reflexão em que o tri-

triangulo AED he iſoſceles, facilmente ſe verá que o angulo AEG he metade do angulo ADG, porque os angulos AED, EAD (Part. I. Art. XXXI.) são iguaes; mas (Parte I. Art. LXVIII.) eſtes dous angulos juntos valem o angulo exterior ADG. Logo o angulo AED, ou AEG, he a metade do angulo ADG. EST. IX.

Pela meſma razão, o angulo DEB ſerá a metade do angulo GDB. Logo o angulo total AEB igualará a metade do angulo ADB. Logo a ſua medida ſerá a metade do arco AGB.

XV.

Tendo-ſe medido o angulo AEB, para ſe ſaber ſe elle he igual a cada hum dos outros angulos, que tem os ſeus vertices no meſmo ſegmento, he preciſo examinar ſe hum deſtes angulos tomado á vontade, AFB (Fig. 3.) por exemplo, he tambem

a me-

EST. IX. Todos os angulos, que tem os ſeus vertices na circumferencia, e que aſſentão ſobre o meſmo arco, são iguaes, e tem por medida cõmua a metade do arco, em que aſſentam.

a metade do angulo no centro ADB. Facilmente nos certificaremos diſto, tirando a recta FDG pelo centro; porque então ſe verá que o angulo AFB ſerá compoſto de outros dous AFD, DFB, que pelo Artigo precedente ſerão as metades dos angulos ADG, GDB; do que ſe concluirá que o angulo total AFB ſerá a metade do angulo ADB; e applicando o meſmo diſcurſo a todos os angulos ACB, (Fig. 1.) AEB, AFB, que tem os ſeus vertices na circumferencia, e que aſſentam ſobre o meſmo arco AGB, ſe poderá concluir, que eſtes angulos são iguaes entre ſi, aſſim como no Artigo precedente o tinhamos ſuſpeitado.

XVI.

Entre os differentes angulos, que tem os ſeus vertices no arco ACEFB, (Fig. 1.) ha alguns, que poderiam á primeira viſta parecer não ſerem comprehendidos na demonſtra-

ção

ção precedente ; são estes angulos, EST. IX.
taes como AFB, (Fig. 4.) em que a recta FDG tirada pelo centro passa por fóra do angulo ADB. Não obstante, observando sempre que o angulo GFA he a metade do angulo GDA, e o angulo DFB a metade do angulo GDB, se verá que o angulo AFB, excesso do angulo DFB sobre o angulo DFA, será neste caso a metade do angulo ADB, excesso do angulo GDB sobre GDA.

XVII.

Pelas figuras, de que nos temos servido, se poderia tambem entender que a demonstração precedente não conviria senão aos segmentos maiores do que hum semicirculo; porém he facil de ver que hum angulo qualquer, tal como AFB, (Fig. 5.) que tivesse o seu vertice em hum segmento mais pequeno do que o semicirculo, seria sempre composto de outros dous DFB, DFA, meta-

EST. IX. tades dos angulos BDG, ADG, e por consequencia que este angulo AFB teria por medida a metade dos dous arcos BG, AG, isto he, a metade do arco AGB.

XVIII.

Depois de termos visto que em hum mesmo segmento os angulos AEB, (Fig. 6.) AFB, AHB, suppostos na circumferencia, são todos iguaes, tentamo-nos a examinar em que se torna o angulo AQB, quando o seu vertice Q se confunde com o ponto B, extremidade da base AB. Este angulo desvanecer se-hia então? Porém não parece possivel, que sem elle se ir fechando por gráos, viesse de repente a extinguir-se. Não se percebe qual seja o ponto, depois do qual este angulo cessasse de existir; como se virá pois a achar a sua medida? He esta huma difficuldade, que não se póde resolver, sem que se recorra á Geometria dos infinitos,

da

EST. IX.

da qual todos os homens tem ao menos huma imperfeita idéa, a qual basta sómente aclarar.

Observemos pois, que quando o ponto E se avizinha para B, mudando-se em F, H, Q, &c. a recta EB se diminue continuadamente; e que o angulo EBA, que ella faz com a recta AB, se abre cada vez mais. Porém por mais curta que venha a ser a linha QB, o angulo QBA não deixará com tudo de ser hum angulo, pois que para o fazermos sensivel, bastará produzir a linha diminuta QB para R. Mas deve tambem ser assim, quando a linha QB, á força de se diminuir, se reduzir em fim a nada? Em que veio então a parar a sua posição? A linha produzida em que se tornou?

A tangente ao circulo he a linha, que sómente o toca em hum só ponto.

He evidente que não he outra cousa senão a recta BS, que toca o circulo em hum só ponto B, sem o encontrar em alguma outra parte, e que por esta razão se chama Tangente.

De-

EST. IX.

Demais. Claro eftá, que em quanto a linha EB fe diminue continuadamente até em fim fe extinguir, a recta AE, que fucceffivamente fe muda em AF, AH, AQ, &c. fe avizinha fempre para AB, e que por fim fe confunde com ella. Logo o angulo na circumferencia AEB, depois de fe ter mudado em AFB, AHB, AQB, vem a fer em ultimo lugar o angulo ABS, feito pela corda AB, e pela tangente BS; e efte angulo, a que chamam angulo no fegmento, deve confervar fempre a propriedade de ter por medida a metade do arco AGB.

O angulo no fegmento he aquelle, que he feito pela corda, e pela tangente. Tem por medida a metade do arco do fegmento.

Ainda que efta demonftração feja talvez hum pouco abftracta para os Principiantes, entendi fer a propofito de a dar, porque ferá utiliffimo áquelles, que quizerem adiantar os feus eftudos até á Geometria dos infinitos, o terem-fe coftumado anticipadamente a femelhantes confiderações.

Se,

Se, não obſtante, os Principiantes acharem que eſta demonſtração he aſſima das ſuas forças, he facil de os pôr em eſtado de deſcubrirem outra, em lhes explicando a principal propriedade das Tangentes. EST. IX.

XIX.

Eſta propriedade he, que huma tangente ao circulo, de qualquer ponto que ſeja B, (Fig. 7.) deve ſer perpendicular ao diametro IDB, que paſſa por eſte ponto. Porque como a curvidade do circulo he tão uniforme, que qualquer diametro IDB o reparte em dous ſemicirculos IAB, IOB, iguaes, e igualmente ſituados reſpeito a eſte diametro, he preciſo que as duas partes BS, BH da tangente commua a eſtes dous ſemicirculos, ſejam tambem igualmente ſituadas a reſpeito deſte diametro. Ora iſto não podia ſer, ſem que IDB foſſe perpendicular á tangente HBS.

A tangente he perpendicular ao diametro, que paſſa pelo ponto, em que ella toca na circumferencia.

Diſ-

XX.

EST. IX. Diſto ſe verá facilmente a razão, por que o angulo no ſegmento ABS tem por medida a metade do arco AGB.

Porque o angulo ADB, junto com os dous angulos iguaes DAB, DBA, fazem (Part. I. Art. LXIV.) dous angulos rectos. Logo a metade do angulo ADB, junto com o angulo DBA, faz hum recto. Mas ajuntando o angulo DBA ao angulo ABS, dá tambem hum recto.

Logo o angulo ABS he igual á metade do angulo ADB. Logo a medida de ABS ferá a metade do arco AGB.

XXI.

A ſegunda demonſtração, que acabamos de dar da propriedade do circulo, de que o angulo ABS tem por medida a metade do arco AGB, nos dá a ſolução do ſeguinte problema.

Deſ-

Defcrever fobre AB (Fig. 8. e 9.) hum fegmento capaz do angulo formado L; ifto he, hum fegmento AFB, no qual todos os angulos AFB na circumferencia fejam iguaes ao angulo L.

EST. IX. Que coufa feja hum fegmento capaz de hum angulo dado.

Para fe refolver efte problema, ferá precifo fazer em A, e em B os angulos BAS, e ABS, cada hum igual ao angulo L; e levantar fobre AS, e fobre BS as duas perpendiculares AD, e BD, que encontrandofe em D, darão o centro do arco procurado AFB.

Maneira de fazer hum fegmento capaz de hum angulo dado.

Porque pelo Artigo XIX. as rectas BS, e AS ferão as tangentes do circulo, o centro do qual he D, e o radio AD, ou BD; pois que BD, ou AD são perpendiculares a BS, e a AS. Demais, pelo Artigo precedente o angulo ABS tem por medida a metade de AGB, e pelo Artigo XV. os angulos taes, como AFB, são tambem medidos por a metade de AGB. Logo eftes angulos

EST. IX. los AFB ſerão iguaes a ABS, iſto he, ao angulo L, como elle ſe pedia.

XXII.

O deſcubrimento das propriedades dos ſegmentos do circulo, que acabamos de explicar, he devido veriſimilmente á ſimples curioſidade dos Geometras; mas teve eſte deſcubrimento o effeito, que outros muitos ſempre tem. O que ao principio parecia não ſer util, o veio a ſer depois, tendo-ſe feito na prática excellentes applicações das propriedades do circulo, que acabamos de demonſtrar. Eu não darei ſenão huma deſtas applicações, a qual ſe achará na ſolução do ſeguinte problema, que he muitas vezes neceſſario na Geografia.

Achar a diſtancia de hum lugar a outros tres, dos quaes ſe ſabem as poſições.

A, B, C, (Fig. 10.) são tres lugares, dos quaes ſe ſabe as reſpectivas diſtancias AB, BC, AC. Quer-ſe ſaber em que diſtancia deſtes lu-

lugares eſtá o ponto D, de donde EST. IX. ſe podem ver todos os tres; mas de donde ſe não póde ſahir para opperar ſobre o terreno.

Principiar-ſe-ha a traçar em papel tres pontos *a*, *b*, *c*, (Fig. 10. e 11.) que ſejam entre ſi ſituados do modo, que eſtam os tres pontos A, B, C, iſto he em linguagem geometrica, ſe fará o triangulo *a b c* ſemelhante ao triangulo ABC.

Tendo-ſe depois obſervado com o ſemicirculo a grandeza dos angulos ADB, BCD, ſe fará ſobre *a b* o ſegmento de circulo *a d b*, capaz do angulo ADB; e ſobre a recta *b c* o ſegmento de circulo *b c d*, capaz do angulo BDC, o encontro *d* deſtes dous ſegmentos deſenhará no papel a poſição do lugar D, iſto he, que as linhas *d a*, *d b*, *d c* eſtarão na meſma proporção a reſpeito de *a b*, *b c*, *a c*, como as diſtancias procuradas DA, DB, DC, a reſpeito das diſtancias dadas AB, BC, AC;

o que

EST. IX. o que não tem neceſſidade de demonſtração, depois do que ſe vio ſobre as figuras ſemelhantes.

XXIII.

Facilmente ſe podia demonſtrar, que na prática ſe tem tirado varios outros ſoccorros das propriedades do circulo, que ſe acabam de demonſtrar; porém he mais a propoſito paſſar a outras propriedades do circulo, as quaes foram tiradas das precedentes, e que tambem tiveram a ſua utilidade.

Para proceder com ordem no deſcubrimento deſtas propriedades, principiaremos, obſervando que dous angulos, quaeſquer que ſejam EDC, EST. X. (Eſtamp. 10. Fig. 1.) EBC, que aſſentam ſobre o meſmo arco EC, ſendo iguaes, ſe ſegue que os triangulos DAE, BAC tem os angulos iguaes; iſto he, (Part. I. Art. XXXIX.) que eſtes triangulos ſão ſemelhantes.

Pois

Pois pela meſma razão, por que EST. X.
o angulo EDC he igual ao angulo EBC, o angulo DEB ſerá igual ao angulo DCB; e quanto aos angulos DAE, BAC, elles ſerão viſivelmente iguaes; ſeja porque são feitos com as meſmas linhas, ou porque dous triangulos, hum dos quaes tem dous angulos reſpectivamente iguaes a dous angulos do outro, tem tambem neceſſariamente o terceiro angulo igual. (P. I. Art. XXXVIII.)

Para depois mais facilmente ſe reconhecer nos triangulos ADE, (Figur. 1. e 2.) ABC as propriedades geraes dos triangulos ſemelhantes, applicaremos o triangulo DAE ſobre o triangulo BAC, pondo AD ſobre AB, e AE ſobre AC, a fim que DE ſeja parallela a BC. Nós então nos lembraremos

1.º Que ſe dous triangulos ADE, ABC são ſemelhantes, os quatro lados AC, AE, AB, AD eſtão em proporção. (Part. I. Art. XXXIX.)

L Que

EST. X. 2.° Que em toda a proporção, o producto dos extremos he igual ao producto dos medios; (Part. II. Art. VIII.) e disto concluiremos, que o rectangulo, ou o producto de AC por AD he igual ao rectangulo de AE por AB; propriedade notabilissima do circulo, que se póde exprimir deste modo: Se em hum circulo se tiram á vontade duas rectas, que se cortem, o producto das duas partes da primeira he igual ao producto das duas partes da segunda.

Se duas cordas se cortarem em hũ circulo, o rectangulo das partes de huma he igual ao rectangulo das partes da outra.

XXIV.

Se as duas rectas BE, DC (Fig. 3.) se cortassem perpendicularmente, e que huma destas duas rectas fosse hum diametro DC, he tambem evidente que as duas partes AB, AE, da outra recta BE, seriam entre si iguaes; de sorte que a propriedade precedente se exprimiria deste modo neste caso particular. Se sobre o diametro DC de hum circulo se levantar

O quadrado de huma perpendicutar huma perpendicular qualquer que ſeja AB, o quadrado deſta perpendicular ſerá igual ao rectangulo de AD por AC.

EST. X. lar qualquer ao diametro de hum circulo, he igual ao rectangulo das duas partes do diametro.

XXV.

Reduzir hũ rectangulo a hum quadrado.

Succede muitas vezes que he neceſſario mudar hum rectangulo em hum quadrado; o Artigo precedente nos dá hum meio facil: ſeja ACFE (Figura 4.) o rectangulo propoſto, prolongue-ſe AC para D, de ſorte que AD ſeja igual a AE, e ſe deſcreva o ſemicirculo DBC, o diametro do qual ſeja DC. Prolongando-ſe depois o lado EA, até que eſte encontre o ſemicirculo, ſe terá AB, que virá a ſer o lado do quadrado pedido ABGH, igual ao rectangulo dado AFCE.

XXVI.

Propõe-ſe muitas vezes hum problema, que não he outra couſa, ſenão o que acabamos de reſolver,

 apre-

EST. X. Que cousa seja huma media proporcional entre duas linhas rectas.

apresentado de outro modo, o qual he de achar huma linha, que seja media proporcional entre duas linhas dadas; entende-se então por media proporcional aquella linha, que he tão grande a respeito da mais pequena das dũas linhas dadas, quanto ella he pequena a respeito da maior; isto he, que se AB, por exemplo, he media proporcional entre AD, e AC, se poderá dizer, que AD he para AB, como AB he para AC. Ora he bem facil de conhecer que este problema he o mesmo que o precedente, pois que (Part. II. Art. VIII.) o producto de AD por AC, isto he, o rectangulo destas duas linhas, he igual ao producto de AB por AB, isto he ao quadrado de AB.

Maneira de a achar.

Logo quando se quizer achar huma media proporcional entre duas linhas dadas, se mudará o rectangulo destas duas linhas em hum quadrado, o lado do qual será a linha procurada.

Tam-

XXVII.

Tambem se póde achar huma media proporcional entre duas linhas de outra maneira, que se segue da propriedade do circulo, explicada no Artigo XIII. Supponhamos que AC (Fig. 5.) seja a maior das duas linhas dadas, e AD a mais pequena; levante-se DB perpendicularmente sobre AC, e o ponto B, onde ella encontrar o semicirculo ABC, traçado sobre o diametro AC, dará a linha AB, media proporcional entre AD, e AC. Porque tirando BC, claro está que o triangulo ABC será rectangulo em B. Logo (Part. I. Art. XXXVIII.) este triangulo será semelhante ao triangulo ABD, pois que além disto estes dous triangulos tem o angulo A de commum; e se os triangulos ABD, e ABC são semelhantes, elles tem os seus lados proporcionaes. Logo AD he para AB, como AB para AC. Logo AB he me-

EST. X.
Outro modo.

EST. X. media proporcional entre AD, e AC.

XXVIII.

Reduzir huma figura rectilinea a hum quadrado.

Querendo-se reduzir huma figura rectilinea a hum quadrado, não será preciso mais (para reduzir este problema ao Artigo XXV.) do que fazer desta figura hum rectangulo; o que será muito facil, por causa de que as figuras rectilineas não são senão ajuntamentos de triangulos, que cada triangulo he a metade de hum rectangulo, que tem a mesma base, e a mesma altura; e que todos os rectangulos provindos dos triangulos, não farão mais do que hum só rectangulo, em se dando a todos huma altura commua. (Part. II. Art. VI.)

XXIX.

As figuras, que nos seus contornos contiverem arcos de circulos, tambem se poderão reduzir a quadradrados, quando práticamente se tiver medido o comprimento dos arcos, de que ellas forem compostas; porque se poderá então reduzir estas figuras, assim como as rectilineas, a rectangulos; para o que se recorrerá aos Artigos IX. e X., onde se ensinou a medir toda a sorte de figuras circulares. EST. X.

XXX.

Fazer hum quadrado, que seja para outro em razão dada.

Tambem da propriedade do circulo explicada no Art. XXIV. se tira hum methodo muito facil para fazer hum quadrado, que seja para hum quadrado dado, em razão dada; problema, que tinhamos promettido no Artigo XXII. da segunda Parte.

Supponhamos, por exemplo, que se propõe de fazer hum quadrado, que seja para o quadrado ABCD, (Fig. 6.) como a linha M para a linha N; divida-se (Part. I. Art. XLI.) o lado CB no ponto E, de sorte que CB seja para BE, como a linha

EST. X. nha N para a linha M; tirando depois a parallela EF a AB, o rectangulo ABEF terá a mesma superficie, que o quadrado pedido. Logo não faltará mais do que reduzir este rectangulo a hum quadrado.

XXXI.

Fazer hum polygono, que esteja em razão dada com hum polygono semelhante.

Querendo-se fazer hum polygono HIKLM, (Fig. 8.) que seja a hum polygono semelhante ABCDE (Fig. 7.) na razão da linha X para a linha Y, se principiará, fazendo sobre o lado AB do polygono dado ABCDE o quadrado ABGF; depois se procurará outro quadrado HIOQ, que seja para o quadrado ABGF, como a linha X para a linha Y. E então descrevendo sobre o lado HI deste quadrado hum polygono HIKLM, semelhante ao primeiro ABCDE, este novo polygono será aquelle, que se pedia. A razão disto he bem facil de achar, lembrando-nos (Part. I. Art. XLVIII.) que as figu-

ras

ras ſemelhantes são entre ſi, como os quadrados dos ſeus lados homologos. EST. X.

XXXII.

Fazer hum circulo, que ſeja para outro circulo em razão dada.

Querendo-ſe fazer hum circulo, a área do qual ſeja para aquella de hum circulo dado, como X para Y, ſerá preciſo conſtruir hum quadrado, que ſeja para o quadrado do radio deſte primeiro circulo, como X para Y, e o lado deſte novo quadrado ſerá o radio do circulo pedido.

XXXIII.

Eis-aqui tambem huma propriedade do circulo tirada daquella, que deram os problemas precedentes.

Se de hum ponto tomado fóra do circulo ſe tirão duas linhas, que o atraveſſem, os rectangulos deſtas

Se de hum ponto A, (Fig. 9.) tomado fóra do circulo, ſe tirão á vontade duas rectas ABC, ADE, que cada huma córte a circumferencia em dous pontos, e que ſe tirem as rectas CD, BE, os triangulos ACD, EST. X. duas rectas feitos pelas ſuas partes exteriores, ſerão iguaes.

ACD, AEB ſerão ſemelhantes, pois que o angulo A he commum aos dous triangulos; e demais diſto elles tem os angulos na circumferencia C, e E iguaes. Ora de ſerem os triangulos CAD, EAB ſemelhantes ſe ſegue, que as quatro linhas AB, AD, AE, AC eſtam em proporção, e por conſequencia o rectangulo das duas rectas AB, AC he igual ao rectangulo das duas rectas AD, AE; o que ſe pode exprimir deſte modo. Se de hum ponto qualquer que ſeja A, tomado fóra do circulo, ſe tiram á vontade duas linhas rectas AC, AE, que atraveſſem eſte circulo, o rectangulo da recta AC pela ſua parte exterior AB, ſerá igual ao rectangulo da recta AE pela ſua parte exterior AD.

XXXIV.

Quando a recta, que parte do ponto A, em lugar de cortar o circulo ſó ſimpleſmente o toca, como AF, AF, a propriedade precedente ſe troca neſta: o quadrado de huma tangente AF he igual ao rectangulo produzido pela ſecante qualquer que ſeja AE, e pela ſua parte exterior AD; o que he bem facil de demonſtrar. Porque conſiderando a recta AF, que toca o circulo, como huma linha, que o cortaria em dous pontos infinitamente vizinhos, as linhas AB, AC não vem a ſer ſenão huma meſma linha AF, e em lugar do rectangulo de AB por AC, ſe tem o quadrado de AF.

EST. X.

O quadrado da tangente he igual ao rectangulo da ſecante pela ſua parte exterior.

XXXV.

A propoſição demonſtrada no Artigo precedente, inſtruindo-nos do valor do quadrado da tangente AF, não nos enſina a tirar eſta tangente do ponto dado A. Para ella ſe tirar, nos lembraremos (Art. XIX.) que o radio FG (Fig. 10.) he perpendicular á tangente FA. Aſſim não falta mais do que achar no circulo da-

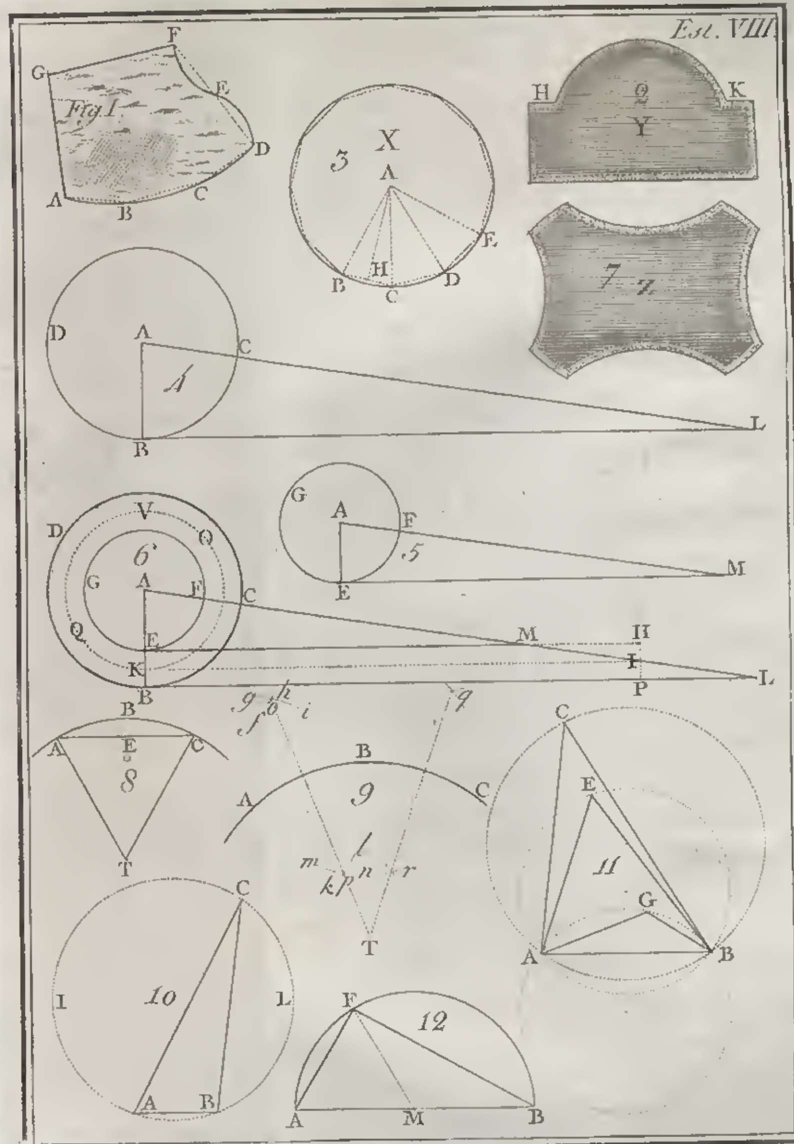
Tirar huma tangente ao circulo de hum ponto dado fóra delle.

EST. X. dado o ponto F, de tal ſorte, que o angulo AFG ſeja recto. Logo em deſcrevendo hum ſemicirculo ſobre AG, o ponto, onde elle cortar o circulo FKO, ſerá (Art. XIII.) o ponto procurado F.

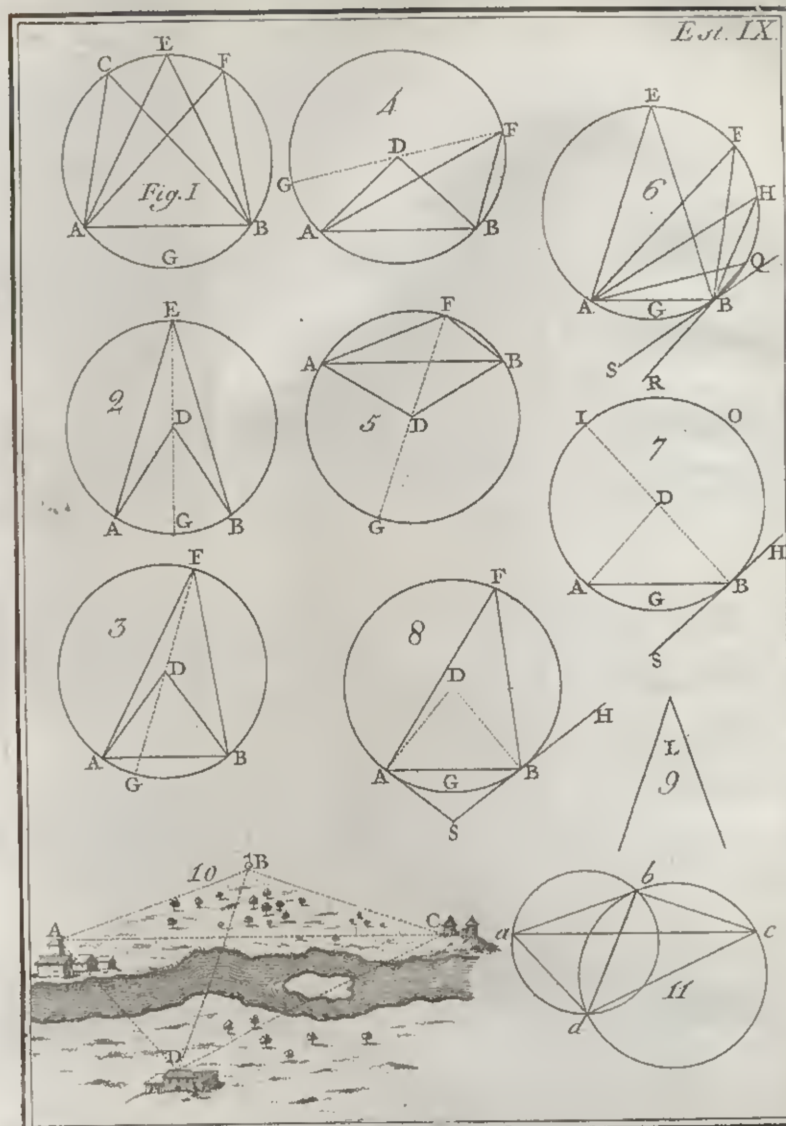
FIM DA PARTE TERCEIRA.

ELE-

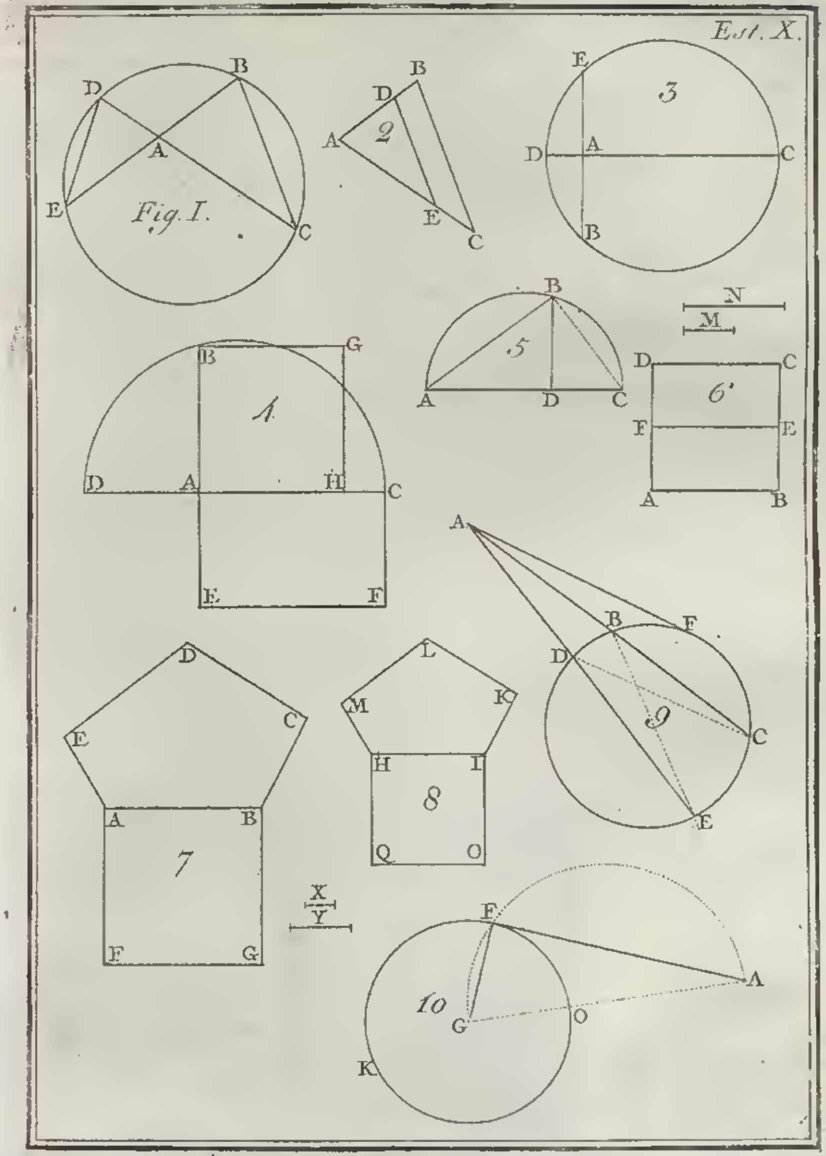
Est. VIII



Est. IX.



Est. X.



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PARTE QUARTA.

Da maneira de medir os sólidos, e as suas superficies.

OS principios, que estabelecemos nas tres primeiras Partes desta Obra, nos seriam sufficientes para resolver problemas muito mais difficeis, do que aquelles, que vamos propôr-nos; porém he mais da ordem, que temos seguido precedentemente, o passar ago-

agora á medição dos sólidos; isto he, das extensões terminadas cada huma por tres dimensões, comprimento, largura, e profundidade.

Esta investigação foi sem dúvida hum dos primeiros objectos, em que se fixou a attenção dos Geometras. Quereriam saber, por exemplo, quanto teria de pedra de cantaria huma muralha, da qual se sabia a altura
EST. XI. AD, (Estamp. XI. Fig. 1.) a largura AB, e a profundidade, ou grossura BG. Teriam proposto comsigo de determinar a quantidade de agua, que em si conteria hum fosso, ou huma cisterna ABCD; (Fig. 2.) quereriam achar a solidez de huma torre, de hum obelisco, de huma casa, &c.

Para tratarmos das figuras, que tem as tres dimensões, da mesma maneira que tratamos as que não tem senão duas, principiaremos, examinando os sólidos, que são terminados por planos.

Não temos necessidade da mane-

nei-

neira de medir as ſuperficies deſtes EST. XI.
corpos, porque ellas não podem ſer ſenão ajuntamentos de figuras rectilineas; e por conſequencia depende a ſua medição do que na primeira Parte ſe diſſe.

I.

Para ſe medir a ſolidez dos corpos, he natural de os reduzir todos ao ſólido o mais ſimples, aſſim como para ſe medir as ſuperficies, ſe reduziráõ todas ao quadrado. Ora o ſólido mais ſimples que ha, he o cubo, que he com effeito em genero de ſólidos, o que o quadrado he em ſuperficies; e vem a ſer hum eſpaço tal, como *a b c d e f g h*, (Fig. 3.) cujo comprimento, largura, e profundidade são iguaes; ou, que he o meſmo, he huma figura terminada por ſeis faces iguaes, que são huns quadrados.

O cubo he hum ſólido terminado por ſeis quadrados. Eſta he a medida cõmua dos ſólidos.

Chama-ſe lado do cubo o lado dos quadrados, que lhe ſervem de faces.

Por

EST. XI. Por hum pé cubico se entende hum cubo, o lado do qual he de hum pé; da mesma sorte huma pollegada cubica he hum cubo, cujo lado he de huma pollegada, &c.

II.

O parallelepipedo he hum solido terminado por seis rectangulos.

Os solidos, que commummente ha para se medir, são figuras, como ABCDEFGH (Fig. 1.) terminadas por seis faces rectangulas ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GEFH, ABGH. Chamão-se estes solidos parallelepipedos, porque as suas faces oppostas conservando em todos os seus pontos a mesma distancia humas das outras, são chamadas parallelas;

Os planos parallelos são aquelles, que conservam sempre entre si a mesma distancia.

assim como as linhas se chamam parallelas, quando ellas conservam sempre a mesma distancia.

III.

Ora propondo-se de medir os solidos desta especie, a analogia deste problema com aquelle, onde se tra-

toa

tou da medição das ſuperficies re- EST. XI. ctangulares, nos dará hum meio facil de o reſolver.

Medição do parallelepipedo.

Principiar-ſe-ha medindo ſeparadamente a altura AD, a largura AB, e a profundidade BG da figura propoſta, ſeja por palmos, ou por pollegadas, &c. Depois ſe multiplicará hum por outro os tres numeros, que ſe tiverem achado; e o producto, que ſahir deſta multiplicação, exprimirá quanto conterá o parallelepipedo de palmos, ou de pollegadas cubicas, &c. ſegundo ſe tiverem medido as dimensões por palmos, ou por pollegadas, &c. Para melhor moſtrarmos como ſe faz eſta operação, daremos hum exemplo della.

Supponhamos que a altura AD ſeja de 6 palmos, a largura AB de 5, e a profundidade BG de 4, o rectangulo ABCD (Part. I. Art. XI.) terá 6 vezes 5, ou 30 palmos quadrados. Se depois ſe imaginar que as linhas BG, CF, DE, AH, que todas

EST. XI. das medem igualmente a profundidade do sólido, sejam repartidas cada huma em quatro partes iguaes; e que pelos pontos de divisão correspondentes se façam passar outros tantos planos parallelos huns aos outros, estes planos dividiráõ o parallelepipedo proposto em outros quatro parallelepipedos, que cada hum terá hum palmo de profundidade, e que todos serão iguaes, e semelhantes. Ora a inspecção sómente da figura dá a conhecer que o primeiro destes parallelepipedos contém 30 palmos cubicos, pois que a sua face exterior ABCD contém 30 palmos quadrados. Logo o sólido total ABCDEFGH conterá 4 vezes 30, ou 120 palmos cubicos.

IV.

Não nos demoramos a explicar os differentes modos, de que na prática se póde usar para se construirem os parallelepipedos, porque estes tão faceis

são

são de achar, que não ha alguem a quem não possam occorrer. Porém daremos o seguinte modo de formar o parallelepipedo, que de todos he o mais util, que se póde considerar. EST. XI.

Imaginando-se que hum quadrado, ou rectangulo ABGH se move parallelamente a si mesmo, de forte que os seus quatro angulos A, B, G, H passem cada hum por huma das quatro linhas AD, BC, GF, HE, perpendiculares ao plano do rectangulo ABGH, se verá que este rectangulo pelo movimento, que temos descripto, formará o parallelepipedo ABCDEFGH.

Os parallelepipedos são produzidos por hum rectangulo, que se move parallelamente a si mesmo.

V.

He quasi inutil o advertir, que por huma linha perpendicular a hum plano entendemos huma linha, que não pende para alguma parte sobre este plano; e da mesma sorte, que hum plano, que não pende mais para huma parte do que para

A linha perpendicular a hum plano he aquella, que não pende para alguma parte deste plano.

O mesmo he de hum

EST. XI. plano perpendicular a outro plano.

ra a outra ſobre outro plano, ſe diz ſer perpendicular a eſte ſegundo plano; eſtas duas definições são analogas áquella, que démos de huma linha perpendicular a outra linha.

VI.

A linha, que he perpendicular a hũ plano, he perpendicular a todas as linhas deſte plano, que partem do ponto, em que eſta linha cabe.

Ora diſto ſe ſegue, que a linha AB, (Fig. 4.) que he perpendicular ao plano X, deve ſer perpendicular a todas as linhas AC, AD, AE, &c. que partem da extremidade A deſta linha, e que eſtam no meſmo plano. Porque he evidente, que ſe ella pendeſſe ſobre alguma deſtas linhas, eſtaria inclinada para alguma parte do plano. Logo ella lhe não ſeria perpendicular.

VII.

Para ſe repreſentar de hum modo bem ſenſivel, o como a linha AB póde ſer perpendicular a todas as linhas, que partem da ſua extremida-

de

de A, não haverá mais do que fazer huma figura em relevo da maneira seguinte. EST. XI.

Construa-se de qualquer materia, que seja bem igual, e facil de dobrar, como papel grosso, hum rectangulo FGDE, (Fig. 5.) repartido em duas partes iguaes pela recta AB, perpendicular aos lados ED, FG; dobre-se depois este rectangulo, de sorte que a préga fique na linha AB, e assim dobrado se transporte sobre o plano X. He evidente, que qualquer que seja a abertura, que se der ás duas partes FBAE, GBAD do rectangulo dobrado EADGBF, estas duas partes ficarão sempre applicadas sobre o plano X, sem que a linha AB mude de posição, respectivamente a este plano. Logo esta recta AB será perpendicular a todas as linhas, que partem do seu pé postas no plano X, pois que os lados AE, AD do rectangulo dobrado, se applicaráõ successivamente sobre

ca-

EST. XI. cada huma deſtas linhas pelo movimento, que temos dito.

VIII.

Da conſtrucção precedente ſe tira huma prática muito commoda para elevar de hum ponto dado em hum plano huma linha perpendicular a eſte plano; ou para abaixar de hum ponto dado fóra do plano huma linha, que ſeja perpendicular a eſte plano. Porque ſendo, por exemplo, o ponto propoſto no plano em A, (Fig. 7.) ou ſeja fóra delle, como em H, ſe poderá ſempre mover o rectangulo EFBGDA ſobre o plano X, até que a préga B toque no ponto dado; e AB virá a ſer neſte caſo a perpendicular pedida.

Prática ſimples para levantar, ou abaixar perpendiculares aos planos.

IX.

Do que tambem ſe ſegue, que huma linha AB ſerá perpendicular a hum plano X, todas as vezes que ella for perpendicular a duas linhas AE,

Huma linha ſerá perpendicular a hũ

AE, e AD defte plano. Porque então AB poderá fer confiderada como a dobra de hum rectangulo, do qual fe applicaffe hum dos lados da dobra fobre AE, e o outro fobre AD. Ora efta dobra não poderia deixar de fer perpendicular a efte plano X.

EST. XI. plano, fe ella for perpendicular a duas linhas defte plano, que partem do ponto, onde ella cahe.

X.

Querendo-fe levantar fobre huma linha, qualquer que feja KL, hum plano perpendicular ao plano X, no qual efteja efta linha, poderá fervir para ifto o rectangulo dobrado GBFEAD; porque não ferá precifo mais, do que pôr fobre a linha KL o lado AD de huma das partes ADGB defte rectangulo dobrado, e o plano defta parte ADGB ferá aquelle, que fe pedia.

Maneira de levantar hũ plano perpendicular a outro.

XI.

Facilmente fe verá, que pondo-fe o terceiro plano Y (Fig. 8.) fobre os dous lados FB, e BG do mefmo re-

EST. XI. rectangulo dobrado, este plano Y será tambem perpendicular á linha AB, e por consequencia parallelo ao plano X.

Para se pôr hum plano parallelo a outro.

Logo se em hum plano X se levantarem tres perpendiculares EF, AB, DG de igual comprimento, não as pondo em linha recta, o plano Y, que passará pelos tres pontos F, B, G, será parallelo ao plano X.

XII.

Quando dous planos não estiverem parallelos, será facil de saber o angulo, que elles entre si fazem, servindo-se do nosso rectangulo dobrado. Para isto se conseguir, se applicará huma das duas partes ABGD (Figura 9.) deste rectangulo sobre o plano X; he evidente que o angulo EAD, ou o seu igual FBG, medirá a inclinação, que o plano EABF tiver sobre o plano DABG. Ora notando-se que AB he a secção commua destes planos, e que EA,

e

e AD são cada huma perpendiculares á linha AB, ſe tirará facilmente a regra ſeguinte. EST. XI.

Dados dous planos, que não são parallelos, he preciſo primeiramente buſcar a linha recta da ſua ſecção commua; depois de qualquer ponto deſta linha ſe lhe tirem duas perpendiculares, que cada huma eſteja em hum deſtes planos; e o angulo, que ellas entre ſi formarem, medirá o angulo, que os dous planos dados fizerem entre ſi.

Medir a inclinação de hum plano ſobre outro.

XIII.

Como facilmente ſe percebe que em quanto ABFE faz o ſeu movimento á roda da dobra AB, a recta AE, cuja extremidade E deſcreve hum arco de circulo ED, nunca ſahe do plano EAHD, perpendicular ao plano X; e que a inclinação de huma recta, qualquer, EA ſobre o plano X, não he outra couſa ſenão o angulo EAD, tambem muito facil-

Medir a inclinação, que huma

EST. XI. linha tem, ſobre hum plano.

cilmente ſe deſcobre, que a inclinação de huma recta, qualquer, EA ſobre o plano X, ſe mede pelo angulo EAH feito entre eſta linha, e a linha AD, que paſſa por A, e pelo ponto H do plano X, onde cahe a perpendicular EH, abaixada ſobre eſte plano, de qualquer ponto E da recta AE.

XIV.

A inſpecção ſómente da figura, de que nos ſervimos no Artigo precedente, faz lembrar hum novo modo de abaixar de hum ponto E, (Figura 9.) fóra do plano X, huma linha EH, perpendicular a eſte plano.

Nova maneira de abaixar huma linha perpendicular a hum plano dado.

Tendo-ſe tirado no plano X huma linha qualquer que ſeja BAS, ſe abaixará do ponto dado E a perpendicular EA a eſta linha. Iſto feito, do ponto A, onde eſta linha perpendicular cahe, ſe levantará no plano X a recta AD, perpendicular a AB; e abaixando depois do ponto dado E,

ſo-

ſobre a recta AD a perpendicular EH, eſta linha ſerá a perpendicular ao plano X. EST. XI.

XV.

Daqui ſe tira outro modo de levantar ſobre hum plano X huma perpendicular MN, de hum ponto M dado ſobre eſte plano.

Segunda maneira de levantar huma linha perpendicular a hum plano dado.

Tendo-ſe abaixado de qualquer ponto E, tomado fóra do plano X, (Fig. 9.) a perpendicular EH, a eſte plano, ſe tirará pelo ponto dado M a recta MN, que ſeja parallela a HE, e eſta ſerá a perpendicular ao plano X.

XVI.

Depois do parallelepipedo, o ſólido mais ſimples he o priſma recto, que he huma figura ABCDEFGHIKLM, (Figura 10.) cujas duas baſes oppoſtas, e parallelas são dous polygonos iguaes, de tal ſorte ſituados, que os lados GF, FE, &c. de

O priſma recto he huma figura ſólida, que tem por baſes dous polygonos iguaes, e as outras faces são rectangulares.

EST. XI. de hum são parallelos aos lados BC, CD, &c. do outro, e cujas faces são os rectangulos ABGH, BGFC, &c.

XVII.

Formação dos prismas rectos.

Os Geometras suppõem estas figuras formadas, assim como os parallelepipedos, por huma base ABCDLM, que se move parallelamente a si mesma, de sorte que os seus angulos A, B, &c. seguem as linhas perpendiculares ao plano da sua base.

XVIII.

Para distinção das differentes especies de prismas rectos, se lhes ajunta o nome do polygono, que lhes serve de base. Por exemplo, o prisma exagonal he aquelle, que tem por base hum exagono.

XIX.

Dous prismas, que tem as suas

Para se achar o modo de medir toda a sorte de prismas rectos, se ob-

obſerve primeiramente, que de dous prismas rectos, cujas baſes forem iguaes, aquelle, que tiver maior altura, ſerá maior em ſolidez, na meſma razão que a ſua altura for maior.

EST. XI. baſes iguaes, eſtam na meſma razão das ſuas alturas.

XX.

Note-ſe depois, que dous priſmas rectos, que tiverem a meſma altura, porém que hum tenha huma baſe, que contenha hum certo numero de vezes a baſe do outro, eſtarão entre ſi na meſma razão das ſuas baſes. A verdade deſta propoſição facilmente ſe percebe, reflectindo-ſe na formação dos priſmas explicada no Artigo XVII.

Dous priſmas, que tem a meſma altura, eſtam na meſma razão das ſuas baſes.

Sejam *a b c d e f g h i k l m*, (Fig. 10. e 11.) ABCDEFGHIKLM dous priſmas, que tem a meſma altura, e que a baſe *a b c d l m* do mais pequeno ſeja, por exemplo, hum quarto da baſe ABCDLM. Como os dous priſmas são produzidos pelos mo-

EST. XI. movimentos das ſuas baſes, ſegue-ſe que hum plano, qualquer que ſeja, que ſer parallelo ao plano, em que eſtam as duas baſes, cortará nos dous priſmas dous polygonos, cada hum dos quaes ſerá igual á baſe do priſma, donde for cortado; iſto he, que a ſecção do maior priſma ſerá ſempre quadrupla da do menor. Logo o priſma ABCDEFGHIKLM ſe poderá conſiderar como compoſto de porções todas quadruplas das do priſma *a b c d e f g h i k l m*, e por conſequencia a ſolidez do primeiro priſma ſerá quadrupla da do ſegundo.

XXI.

Depois deſtas duas obſervações, não ſerá difficil o formar a regra ſeguinte para ſe medirem todos os priſmas rectos.

A medida do priſma recto he o producto da ſua baſe pela ſua altura.

Primeiramente ſe medirá por palmos quadrados, ou por pollegadas quadradas, &c. a área da baſe do priſma propoſto; depois ſe multiplica-

cará o numero, que se tiver achado, EST. XI.
pelo numero de palmos, ou de pollegadas, &c. que contiver a altura do prisma, e o seu producto dará o numero de palmos, ou de pollegadas cubicas, &c. que o prisma proposto contiver, e este numero será por consequencia a sua medida.

XXII.

Os prismas obliquos differem dos prismas rectos, em que as faces destes são compostas de rectangulos, e as daquelles de parallelogramos.

Tambem se dá o nome de prisma aos sólidos, (Fig. 13.) que tem duas bases polygonas iguaes, como as precedentes, e cujas faces são parallelogramos, em lugar de serem rectangulos. Estes novos prismas para se distinguirem daquelles, de que fallamos, se chamam prismas obliquos, em contraposição aos outros, que se chamáram primas rectos.

XXIII.

Formação dos prismas obliquos.

Entende-se por prismas obliquos aquelles, que são formados por huma base *a b c k i*, que se move paral-

EST. XI. rallelamente a ſi meſma ; e de tal ſorte, que os ſeus angulos ſeguem as linhas parallelas *a g*, *b h*, *c d*, &c. que ſe elevam fóra do plano da baſe, mas que lhe não são perpendiculares.

XXIV.

A analogía, que ha entre a formação deſte priſma, e a dos priſmas rectos, dos quaes temos fallado, (Art. XVII.) nos dá facilmente a medida da ſolidez dos priſmas obliquos ; porque ſe imaginarmos que ao pé de hum priſma obliquo *a b c d e f g h i k* (Fig. 12. e 13.) eſteja hum priſma recto ABCDEFGHIK, que tenha a meſma baſe, e que eſtes dous priſmas eſtejam comprehendidos entre duas parallelas, ſe verá que a ſolidez deſtes dous corpos ſerá abſolutamente a meſma.

Porque ſe por hum ponto, qualquer que ſeja P da altura, ſe fizer paſſar hum plano parallelo á baſe,

as

as fecções NOPQR, *nopqr*, que efte plano formar em cada hum deftes dous prifmas, fe poderão confiderar, como fe as bafes iguaes ABCKI, *abcki* chegaffem a NOPQR, *nopqr*, pelo movimento que fizeffem eftes dous prifmas; e affim eftas duas fecções feriam polygonos iguaes. EST. XI.

Ora fe todos os córtes imaginaveis, que neftes dous prifmas fe podem formar, cortados pelos mefmos planos, são iguaes, fegue-fe que a fomma deftas porções, ifto he, dos prifmas, he igual tambem.

Os prifmas obliquos são iguaes aos prifmas rectos, quando elles tem as mefmas bafes, e as mefmas alturas.

Exprime-fe ordinariamente efta propofição defte modo: Os prifmas obliquos são iguaes aos prifmas rectos, quando elles tem as mefmas bafes, e as mefmas alturas. A altura do prifma he a perpendicular abaixada do plano fuperior fobre o inferior, ou fobre o feu prolongamento.

XXV.

EST. XI.

O mesmo he dos parallelepipedos obliquos, a respeito dos parallelepipedos rectos.

Como os parallelepipedos devem entrar no numero dos prismas, o que acabamos de dizer ácerca dos prismas se entenderá tambem dos parallelepipedos obliquos, isto he, das figuras *a b c d e f g h*, (Estampa XII. Fig. 1. e 2.) produzidas pelo movimento de hum quadrado, de hum rectangulo, e ainda de hum parallelogrammo, de sorte que os seus quatro angulos sigam as linhas parallelas, que se elevam obliquamente da sua base. Assim o parallelepipedo obliquo *a b c d e f g h* será igual ao parallelepipedo recto ABCDEFGH, se a base *a b g h* for a mesma, ou tiver a mesma superficie, que tiver a base ABGH; e se a perpendicular abaixada do plano *d c f e* sobre o plano *a b g h* for igual á perpendicular abaixada do plano DCFE sobre o plano ABGH.

EST. XII.

Ten-

XXVI.

Tendo-se visto o que respeita aos parallelepipedos, e aos prismas, examinemos agora as pyramides, isto he, os corpos taes, como ABCDEFG, (Fig. 3.) comprehendidos em hum certo numero de triangulos, que partindo todos do mesmo vertice A, se terminam em huma base polygona, qualquer que seja BCDEFG. He necessario considerar esta sorte de sólidos não sómente pelos haver nos edificios, e em outras obras, que ha para construir, mas tambem porque todos os sólidos terminados por planos, são ajuntamentos de pyramides, assim como as figuras rectilineas são ajuntamentos de triangulos. Para nos certificarmos disto, não he preciso mais do que tirar linhas de hum ponto tomado á vontade, no interior do corpo proposto, a todos os angulos delle. EST. XII.

XXVII.

EST. XII. Diſtinguem-ſe tambem as pyramides humas das outras, aſſim como os priſmas, pelo nome da figura, que lhes ſerve de baſe.

XXVIII.

Quando a pyramide tem por baſe huma figura regular, e que o ſeu vertice correſponde perpendicularmente ao centro H da ſua baſe, como na Figura 3. chama-ſe então pyramide recta; e ao contrario ſe chama pyramide obliqua, quando o ſeu vertice não eſtá perpendicularmente por ſima do ſeu centro, como na Figura 5.

XXIX.

Para deſcubrir a maneira de ſe medir toda a ſorte de pyramides, tanto rectas, como obliquas, principiaremos, fazendo ſobre eſtas figuras algumas reflexões geraes, que ſe nos of-

offerecem pelo conhecimento das pro- EST. XII.
priedades dos prismas.

Quando se faz reflexão na igualdade dos prismas, que tem a mesma base, e a mesma altura, he natural o lembrar-nos, que os parallelogrammos são iguaes entre si, quando elles tem estas mesmas condições, e que o mesmo he tambem dos triangulos. Estas tres verdades apresentando-se de huma vez ao espirito, a analogía nos deve conduzir a crer, que as propriedades, que são communas aos parallelogrammos, e aos triangulos, o podem tambem ser aos prismas, e ás pyramides; deve-se pois suspeitar que as pyramides, que tem a mesma base, e a mesma altura, tem tambem a mesma solidez.

XXX.

As reflexões seguintes confirmaráõ o que suspeitamos.

Sejam ABCDE, *a b c d e* (Fig. 4. e 5.) duas pyramides, cujas alturas

EST. XII. ras AH, *a b* ſejam as meſmas, e as ſuas baſes duas figuras iguaes BCDE, *b c d e*; imaginando pois que eſtas duas pyramides ſejam cortadas por huma infinidade de planos parallelos ás ſuas baſes, facilmente ſe comprehenderá que as porções cortadas deſtas duas pyramides darão os quadrados iguaes IKLM, *i k l m*; e por conſequencia, que as duas pyramides podem ſer conſideradas como ajuntamentos de hum meſmo numero de porções cortadas, que ſerão iguaes, cada huma á ſua correſpondente. Logo diſto ſe deve concluir, que a ſomma das porções cortadas ſerá igual de huma, e outra parte, iſto he, que as duas pyramides ſerão iguaes em ſolidez.

Se as baſes das duas pyramides foſſem outros polygonos regulares, ou irregulares BCDEF, *b c d e f* (Fig. 6. e 7.) iguaes entre ſi, ninguem deixaria tambem de entender, que todas as porções cortadas IKLMN,

i k

iklmn de huma, e outra parte das duas pyramides, feriam iguaes entre fi; e por confequencia concluir difto, que as pyramides teriam fempre a mefma folidez, quando ellas tivesfem a mefma bafe, e a mefma altura. EST. XII.

XXXI.

Tudo ifto he facil de imaginar, depois da demonftração, que démos da igualdade dos prifmas, que tem a mefma altura; com tudo a femelhança, que ha entre qualquer córte IKLMN de huma pyramide, e a fua bafe BCDEF, e a igualdade dos córtes IKLMN, e *iklmn*, entra no numero daquellas propofições, que ainda que intelligiveis para todos, tem em rigor neceffidade de huma demonftração. Ora para efta fe achar, fomos obrigados a entrar em varias confiderações fobre a femelhança das figuras fólidas.

Tor-

EST. XII.

XXXII.

Tornemos á pyramide ABCDEF, (Fig. 6. e 7.) e ſupponhamos que eſta ſeja cortada por hum plano IKLMN, parallelo á ſua baſe; vamos a demonſtrar que a ſecção, ou córte formado por eſte plano na pyramide, he hum polygono perfeitamente ſemelhante ao polygono BCDEF; e que a pyramide AIKLMN he em ſi meſma inteiramente ſemelhante á pyramide ABCDEF; iſto he, que os angulos, que todas as linhas deſtas duas figuras formam, são reſpectivamente iguaes; e que todos os lados da pyramide pequena tem entre ſi a meſma razão, que tem os lados da grande.

Em que conſiſte a ſemelhança de duas figuras.

XXXIII.

Principiemos obſervando, que ſe dous planos X, e Y (Figura 8.) são parallelos, e que ſe duas linhas quaeſquer ALD, AME, partindo de hum meſmo ponto A, atraveſ-

ſam

ſam eſtes dous planos, as rectas LM, eDE, que encontram os pontos L, M, D, E, ſeráõ parallelas. A razão diſto he, que ſe eſtas duas linhas não foſſem parallelas, ſe encontrariam, ſendo produzidas em alguma parte; mas ſe produzindo-as ſe encontraſſem, os planos, em que ellas ſe acham, e donde não podem ſahir, ſendo tambem produzidos, quanto foſſe neceſſario, da meſma ſorte ſe encontrariam. Logo elles não ſeriam parallelos, como ſe ſuppunha. EST. XII.

XXXIV.

Suppondo-ſe pois que o plano IKLMN (Fig. 6.) ſeja parallelo ao plano BCDEF, diſto ſe ſeguirá que todas as linhas ML, LK, KI, IN, NM ſeráõ parallelas ás linhas ED, DC, CB, BF, FE; e por conſequencia os triangulos ALM, AKL, AIK, &c. ſeráõ ſemelhantes aos triangulos ADE, ACD, ABC, &c. Tomando hum dos lados deſtes triangu-

EST. XII. gulos, AM por exemplo, por medida commua, ou petipé de todos os lados da pyramide pequena, ao mesmo tempo que o lado correspondente AE servir de medida aos lados da grande, facilmente se verá que os lados ML, LK, KI, &c. do polygono IKLMN serão proporcionaes aos lados ED, DC, CB, &c. do polygono BCDEF.

Tambem será facil o comprehender, que todos os angulos IKL, KLM, &c. serão respectivamente iguaes aos angulos BCD, CDE, pois que os primeiros serão formados por linhas parallelas aos lados dos segundos. Logo estes dous polygonos IKLMN, BCDEF serão semelhantes.

XXXV.

Ora sendo os lados AM, AL, AK, &c. proporcionaes aos lados AE, AD, AC, &c. e os angulos ALM, ALK, &c. respectivamente

iguaes aos angulos ADE, ADC, &c. EST. XII.
por caufa da femelhança dos triangulos ALM, ADE, ALK, ADC, &c. as duas pyramides AIKLMN, ABCDEF ferão inteiramente femelhantes.

XXXVI.

Finalmente, fe do ponto A fe tirar AH, perpendicular ao plano, em que eftá conftruido o polygono BCDEF, e que Q feja o ponto, onde fe encontre efta perpendicular com o plano do polygono IKLMN, he evidente que as rectas AQ, AH, alturas das duas pyramides AIKLMN, ABCDEF, eftarão entre fi na mefma razão dos feus lados homologos AM, AE; AL, AD, &c. ou, o que vem a fer o mefmo, tomando-fe as alturas AQ, AH por petipés das duas pyramides, os lados AM, AL, &c. conterão tantas partes de AQ, quantas partes de AH contiverem os lados AE, AD, &c.

Tor-

XXXVII.

EST. XII. Tornemos agora a conſiderar ao meſmo tempo as duas pyramides ABCDEF, (Fig. 6. e 7.) *abcdef*, e ver-ſe-ha que os dous córtes IKLMN, *iklmn*, ſendo ſemelhantes ás baſes BCDEF, *bcdef*, que são as meſmas, ſerão entre ſi ſemelhantes. Demais ſe verá, que eſtes dous córtes ſerão entre ſi iguaes, pois que os petipés deſtas duas figuras são as rectas iguaes AQ, *aq*, alturas das pyramides AIKLMN, *aiklmn*.

As pyramides, que tem a meſma baſe, e a meſma altura, são iguaes.

Logo, ſem ſe ſaber qual he a ſolidez das pyramides, ſe ſabe já com certeza, que ſe ellas tem a meſma altura, e a meſma baſe, são iguaes, como nós o tinhamos ſuſpeitado. (Art. XXIX.)

XXXVIII.

Duas pyramides são tambem iguaes, ſe

Se as baſes das duas pyramides em lugar de ſerem as meſmas, foſſem ſómente iguaes em ſuperficie, as as pyramides ferião tambem iguaes em folidez; porque fejam *a b c d e f*, e *a r s t* (Fig. 7. e 9.) duas pyramides, que tenham a mefma altura *a h*; cortando-fe eftas duas pyramides por qualquer plano parallelo á bafe, he evidente que haverá a mefma razão entre a área *i k l m n*, e a área *b c d e f*, que houver entre a área *u x y*, e a área *r s t*; pois que *i k l m n*, *b c d e f*, fendo (Art. XXXIV.) figuras femelhantes, não differem (Part. I. Artigo XLVIII.) fenão pelos feus petipés *a q*, *a h*, &c. e as figuras *u x y*, *r s t*, fendo tambem femelhantes, da mefma forte não differem fenão pelos feus petipés, que são tambem as linhas *a q*, *a h*.

EST. XII. tendo a mefma altura, as fuas bafes, fem que fejam polygonos femelhantes, são iguaes em fuperficie.

Porém fe as bafes *r s t*, *b c d e f* são iguaes em fuperficie, as fuas partes proporcionaes *u x y*, *i k l m n* ferão tambem iguaes. Logo todas as porções cortadas das duas pyramides *a r s t*, *a b c d e f* terão a mefma extensão. Logo a fomma dellas, ifto

he,

EST. XII. he, as meſmas pyramides, ſerão iguaes em ſolidez.

XXXIX.

As pyramides, que tem a meſma altura, eſtam entre ſi como as ſuas baſes.

Se a baſe *b c d c f* da primeira pyramide contiveſſe a baſe *r s t* hum certo numero de vezes, a ſolidez da primeira pyramide *a b c d e f* conteria o meſmo numero de vezes a ſolidez da ſegunda *a r s t*.

Porque neſte caſo a baſe *b c d e f*, ſendo dividida em varias partes, cada huma das quaes foſſe igual á baſe *r s t*, ſe poderia conceber ſer a pyramide *a b c d e f* compoſta de varias outras pyramides, que tiveſſem por baſes as partes de *b c d e f*. Ora cada huma deſtas novas pyramides ſeria igual á ſegunda pyramide *a r s t*, ſegundo o provámos no Artigo precedente. Logo, &c.

Que ſe a baſe *r s t* não foſſe exactamente contida na baſe *b c d e f*, mas ſim eſtas duas baſes tiveſſem huma medida commua X, ſe divi-

di-

diria cada huma das duas bases *b c* EST. XII.
d e f, *r s t* em partes iguaes X, e se veria que as duas pyramides *a b c d e f*, *a r s t* seriam compostas de tantas novas pyramides, todas entre si iguaes, quantas as duas bases contivessem de partes X. Logo as pyramides *a b c d e f*, *a r s t* seriam entre si como as suas bases.

E se as bases fossem incommensuraveis, se mostraria sempre que não obstante isto, as pyramides estariam entre si na mesma razão das suas bases, servindo-nos de huma inducção semelhante áquella, de que usámos em caso semelhante, (Part. II. Art. XXVIII.) quando se tratou de comparar as figuras, cujos lados eram incommensuraveis; isto he, que se diminuiria ao infinito a medida X, de modo que ella pudesse ser julgada por medida commua, tanto da base *r s t*, como da base *b c d e f*.

Ten-

XL.

EST. XII. Tendo-ſe deſcuberto que as pyramides, que tem a meſma altura, eſtam na meſma razão das ſuas baſes, ſe deve reconhecer que a medida da ſolidez dellas inclue em ſi pouquiſſima difficuldade.

Porque não ſe trata mais do que de ſaber medir huma ſó pyramide para ſe ſaberem medir todas as mais. Supponhamos, por exemplo, que ſabemos medir a pyramide ABCDE, (Fig. 10. e 11.) e que ſe nos pede a medida da pyramide ASTVXY, que não tem a meſma altura, nem a meſma baſe da primeira: principiaremos, fazendo huma pyramide ſemelhante á pyramide ABCDE, e que tenha a altura da pyramide ASTVXY, o que ſerá muito facil; porque baſtará (Art. XXXV.) prolongarem-ſe os lados AB, AC, AD, AE, e cortallos pelo plano LMNO, cuja diſtancia AG do vertice A ſeja igual á altura AO.

Iſto

Isto feito, pois que por supposição sabemos medir a pyramide ABCDE, he evidente que tambem saberemos medir a pyramide ALMNO, que lhe he semelhante; porque quaesquer que sejam as operações, pelas quaes se medir a pyramide ABCDE, as mesmas se poderão sempre fazer para se medir a pyramide semelhante ALMNO, excepto que nesta se usará de hum petipé differente. EST. XII.

Supponhamos pois que a pyramide ALMNO esteja medida; a sua medida determinará tambem a da pyramide proposta ASTVXY, porque pelo Artigo precedente estas duas pyramides estam entre si como as suas bases LMNO, STVXY; e demais nós ensinámos na segunda Parte a achar a razão, que ha entre estas duas bases.

XLI.

Pois que não se trata senão de medir huma só pyramide para saber

EST. XII. ber medir todas as que ſe podem imaginar, proponhamo-nos huma dellas extremamente ſimples, que ſe póde formar, tirando dos quatro angulos A, B, C, H (Fig. 12.) de huma das faces de hum cubo ABCDEFGH quatro linhas ao ponto O, centro deſte cubo; iſto he, ao ponto igualmente diſtante de A, D, B, E, &c.

Facilmente ſe comprehende que eſta pyramide he a ſexta parte do cubo, pois que eſte ſe póde desfazer em ſeis pyramides iguaes, tomando cada face por baſe. Ora o valor do cubo he o producto da altura AF pela baſe ABCH. Logo para ſe ter o valor da pyramide, he neceſſario repartir o producto de AF por ABCH em ſeis partes iguaes; ou, que he o meſmo, ſerá preciſo multiplicar a ſexta parte da altura AF pela baſe ABCH; e como a ſexta parte da altura AF he o terço da altura OL da pyramide OABCH, pois que a ſua altura OL he a meta-

tade do lado do cubo, segue-se que EST. XII.
a medida da pyramide OABCH he
o producto do terço da sua altura
pela sua base.

XLII.

Agora supponhamos que haja para medir huma pyramide, qualquer que ella seja, OKMNSTV; (Figura 13.) imaginemos hum cubo, cujo lado AB, (Figura 12. e 13.) ou AF, tenha dobrada altura de OL da pyramide proposta; e imagine-se neste cubo huma pyramide OABCH, a ponta da qual esteja no centro, e que tenha por base huma das faces ABCH do cubo. Esta nova pyramide terá a mesma altura da primeira; e por consequencia (Art. XXXIX.) a solidez de OABCH será para a de OKMNSTV, como a base ABCH para a base KMNSTV. Ora pelo Artigo precedente o producto do terço da altura commua OL pela base ABCH he o valor da pyra-

EST. XII. mide OABCH. Logo o producto do terço da mesma altura commua OL pela base KMNSTV, será o valor da pyramide proposta OKMNSTV.

A solidez de qualquer pyramide, he o producto da sua base pelo terço da sua altura.

E com isto se descobre este theorema geral, que huma pyramide tem por medida o producto da sua base pelo terço da sua altura.

XLIII.

A pyramide he o terço do prisma, que tem a mesma base, e a mesma altura.

Como temos visto (Art. XXI.) que a solidez de hum prisma he o producto da sua base pela sua altura, claro está pelo Artigo precedente que as pyramides serão sempre a terça parte dos prismas, que tiverem a mesma base, e a mesma altura.

XLIV.

Depois de termos medido todos os sólidos terminados por planos, vamos agora a procurar o caminho, que se poderá ter seguido para se medirem os sólidos, que tem as suas su-

ſuperficies curvas. E como na terceira Parte não tratámos ſenão das figuras, cujos contornos não contém outras curvas, ſenão as do circulo, aqui tambem não examinaremos ſenão os corpos, cujas curvidades são circulares. EST. XII.

Teremos dous objectos no exame deſtes corpos, a medição das ſuas ſuperficies, e a dos ſeus ſólidos; porque ſendo eſtas ſuperficies ou inteiramente curvas, ou parte planas, e parte curvas, não podemos remetter-nos para a ſua medição á primeira Parte, como fizemos para os corpos terminados por planos.

XLV.

EST. XIII. O cylindro he hum ſólido terminado por duas baſes oppoſtas, e parallelas, que são circulos iguaes,

O mais ſimples de todos os ſólidos curvos he o cylindro; he eſte hum corpo como ABCDEF, (Eſtampa XIII. Fig. 1.) as duas baſes do qual ABC, DEF são dous circulos iguaes, e parallelos unidos por huma ſuperficie curva, que ſe póde ima-

EST. XIII. e por hum plano curvado á roda das ſuas circumferencias.

imaginar ſer formada por hum plano cingido á roda das ſuas circumferencias.

Diſtinguem-ſe em cylindro recto, e em cylindro obliquo.

Quando os dous circulos eſtam ſituados de modo, que o centro G do primeiro correſponde perpendicularmente ſobre o centro H do ſegundo, o cylindro então ſe chama recto.

Pelo contrario o cylindro ſe chama obliquo, quando a linha tirada pelos dous centros G, e H (Fig. 2.) he obliqua a reſpeito dos planos ABC, DEF.

XLVI.

Formação do cylindro.

A formação geometrica deſtes ſólidos, analoga áquellas dos priſmas, e dos parallelepipedos, dos quaes fallámos (Art. XVII.) conſiſte em fazer mover hum circulo parallelamente a ſi meſmo, de ſorte que todos os ſeus pontos deſcrevam linhas rectas parallelas, que ſe elevam fóra do plano deſte circulo.

Pa-

XLVII.

O modo de medir a ſuperficie de hum cylindro recto, o que he muitas vezes neceſſario na prática, achar-ſe-ha na maneira ſeguinte. EST. XIII.

Tendo-ſe repartido as duas circumferencias ABC, (Fig. 1.) DEF, cada huma em igual numero de partes, correſpondendo os pontos de divisão perpendicularmente huns por ſima dos outros, ſe tirem as linhas rectas, que unão os angulos correſpondentes dos dous polygonos regulares, que ſe formam por eſta operação. He evidente que então ſe terá hum priſma, cuja ſuperficie ſerá composta de tantos rectangulos comprehendidos na ſuperficie do cylindro, quantos forem os lados comprehendidos em cada huma das circumferencias ABC, DEF. Ora tendo todos eſtes rectangulos cada hum a ſua altura igual a AD, a ſua medida total ſerá o producto da altura AD, EST. XIII. AD, pela ſomma de todas as baſes, iſto he, pelo contorno do polygono comprehendido, ou inſcripto no circulo DEF, ou ABC.

Mas como á medida que o numero de lados deſte polygono for maior, o contorno do polygono ſe avizinhará cada vez mais a ſer igual á circumferencia, e a ſuperficie do priſma a ſer igual á do cylindro, ſegue-ſe que imaginando-ſe ſer infinito o numero dos lados do polygono, em nada differirá o priſma do cylindro. Logo a ſuperficie curva do cylindro recto, he igual a hum rectangulo, cuja altura ſeria AD, e a ſua baſe huma linha recta igual á circumferencia DEF.

A ſuperficie curva de hum cylindro recto, he igual a hum rectangulo, que tem a meſma altura, e que a ſua baſe he igual á circumferencia.

Eſta propoſição póde ſervir para ſe ſaber, por exemplo, quanto ſeria preciſo de ſeda para cubrir hum pilar cylindrico, ou para tapeçar o interior de huma Torre redonda.

Quan-

XLVIII.

Quanto á ſuperficie do cylindro obliquo, não ſe póde eſta medir da meſma maneira, porque em lugar de rectangulos ſe teriam parallelogramos de alturas differentes. Sómente por methodos muito complicados, e muito difficeis ſe chegou a ſaber pouco mais, ou menos o valor deſta ſuperficie; e os problemas deſte genero não competem a elementos. EST. XIII.

XLIX.

A ſolidez dos cylindros, ſejam rectos, ou obliquos, he couſa muito facil de achar; porque he evidente, que tudo o que temos dito dos priſmas, ſerá applicavel aos cylindros, figurando-ſe ſerem os cylindros como os ultimos dos priſmas, que ſe lhes poſſam inſcrever.

Os cylindros, que tem a meſma baſe, e a meſma altura, são iguaes em ſolidez.

Aſſim os cylindros, que tiverem a meſma baſe, e a meſma altura, ſerão iguaes em ſolidez.

EST. XIII.

L.

A medida de qualquer cylindro he o producto da ſua baſe pela ſua altura.

E a medida do cylindro, qualquer, conſiſtirá no producto da ſua baſe pela ſua altura.

LI.

A pyramide cónica he o ſólido curvo mais ſimples depois do cylindro; ſendo huma figura como ABCDE, (Fig. 3. e 4.) cuja baſe he hum circulo, e cuja ſuperficie he compoſta de huma infinidade de linhas rectas, que concorrem todas da circumferencia BCDE ao vertice A. Póde-ſe conſiderar eſte ſólido como huma pyramide, que tem por baſe hum circulo.

A pyramide cónica he hum ſólido, que tem por baſe hum circulo.

LII.

Diſtinguem-ſe em pyramide cónica recta, e em pyramide cónica obliqua.

Se a ponta, ou vertice A da pyramide cónica correſponde perpendicularmente por ſima do centro O da ſua baſe, como na Figura 3. a pyramide cónica ſe chama recta; e ſe ſe o vertice correſponde a hum ponto differente do centro da baſe, como na Figura 4. ſe chama obliqua. EST. XIII.

LIII.

Para ſe medir a ſuperficie de huma pyramide cónica recta ABCDE, (Fig. 3.) ſe deve eſta imaginar, como ſe foſſe a ultima das pyramides, que ſe lhe poſſa inſcrever, iſto he, que ſe dividirá a circumferencia da ſua baſe BCDE, como ſe fez á circumferencia do cylindro em huma infinidade de pequenos lados; e tirando linhas de todos os angulos ao vertice A da pyramide cónica, ſe achará que a ſuperficie da pyramide cónica he hum ajuntamento de huma infinidade de pequenos triangulos iſoſceles, a altura dos quaes he igual ao lado AB da pyramide cónica, ſendo todas as baſes dos meſmos triangulos tomadas juntamente, iguaes á circumferencia BCDE; do que he facil de ver, que a me-

Mede-ſe a ſuperficie da

EST. XIII. pyramide cónica recta, multiplicando a metade do seu lado pela circumferencia da sua base.

a medida desta superficie se achará, multiplicando a metade de AB pela circumferencia BCDE.

LIV.

Se agora nos lembrarmos de que a superficie de hum sector deste circulo he (Part. III. Art. X.) igual ao producto do arco deste sector por a metade do seu radio, se verá que para cubrir a pyramide cónica recta ABCDE com huma superficie flexivel, como papel grosso, &c. seria necessario tomar hum sector de circulo, o radio do qual fosse igual a AB, e o arco igual á circumferencia BCDE.

A superficie curva de huma pyramide cónica he hum sector de circulo.

LV.

Quando a pyramide cónica he obliqua, a medida da sua superficie, assim como a do cylindro obliquo, he muito difficil de se saber, ainda que não seja mais que por approximamaçāo, e tambem he hum problema fóra dos limites dos Elementos. EST. XIII.

LVI.

Quanto á ſolidez das pyramides cónicas, ſejam ellas rectas, ou obliquas, ſerão conſideradas como a ultima das pyramides polygonas, que ſe lhes poſſa inſcrever, e por conſequencia ſe lhes poderá applicar o que das pyramides ſe diſſe em geral.

As pyramides cónicas, que tem a meſma baſe, e a meſma altura, são iguaes.

Aſſim as pyramides cónicas, que tiverem a meſma baſe, e a meſma altura, ſerão iguaes.

LVII.

A ſua medida he o producto da ſua baſe pelo terço da ſua altura.

E a ſolidez de huma pyramide cónica, qualquer que ſeja, ſerá o producto da ſua baſe pelo terço da ſua altura.

LVIII.

He muitas vezes neceſſario medir hum corpo tal como BCDEF-GH, EST. XIII. GH, (Fig. 5. e 6.) a que chamam pyramide cónica troncada, que he a parte, que fica de huma pyramide cónica AFGH, tendo-se-lhe cortado outra pyramide cónica mais pequena ABCDE por huma secção parallela á base FGH. He evidente que a medida deste sólido será a differença que houver entre as duas pyramides cónicas ABCDE, AFGH.

LIX.

Quanto á superficie de huma pyramide cónica troncada, se ella for formada pela secção de huma pyramide cónica recta, póde-se achar cousa, que seja mais simples do que he medirem-se separadamente as superficies das duas pyramides cónicas, e diminuir-se huma da outra, para o que se usará do methodo seguinte, que he facil de imaginar, depois do que dissemos no Artigo LIV.

Supponhamos que ALR (Fig. 6. e 7.) seja o sector, que seria neces-

sa-

ſario ſe conſtruiſſe para cubrir a pyramide cónica AFGH ; deſcrevendo pois do centro A, com o intervallo AM igual a AB , hum arco MP , claro eſtá que o eſpaço MPRL ſerá huma porção de coroa propria para com ella ſe cubrir a ſuperficie procurada da pyramide cónica troncada. Ora imaginando-ſe que as duas circumferencias , das quaes MP, e LR são os ſeus arcos ſemelhantes, eſtejam completas, ſe terá huma coroa inteira , que terá por medida (Part. III. Art. VIII.) o producto de ML, igual a BF por huma circumferencia , da qual ſeja radio AN, ſuppoſto eſtar N no meio de ML. Logo a porção de coroa MPLR, ou a ſuperficie da pyramide cónica troncada BCDEFGH, que lhe he igual , ſe medirá , multiplicando ML pelo arco NQ; ou, que vem a ſer o meſmo, multiplicando BF pela circumferencia IKL , que nos dará a ſecção do ſólido propoſto por

EST. XIII.

Maneira de medir a ſuperficie de huma pyramide conica troncada.

EST. XIII. por hum plano parallelo á base, e que passa pelo meio I do lado BF.

LX.

A esfera he hum corpo, cuja superficie tem todos os seus pontos igualmente distantes do centro.

O ultimo dos corpos sólidos, de que trataremos, se chama Esfera, ou Globo, que he aquelle, cuja superficie tem todos os seus pontos igualmente distantes de hum mesmo ponto, que he o centro della. Ha muitas vezes necessidade de se medir esta superficie; querer-se-ha saber, por exemplo, quanto será preciso de ouro para se dourar huma bola, quantas planchas de chumbo se tomaráõ para cubrir huma cupula, &c.

LXI.

Seja X (Fig. 8.) a esfera, da qual se queira medir a superficie, he evidente que se póde considerar este sólido como produzido pela revolução de hum semicirculo AMB, (Fig. 8.) ao redor do seu diametro AB.

Sup-

Supponhamos primeiramente que EST. XIII. em lugar da ſemicircumferencia tenhamos hum polygono regular de hum infinito numero de pequenos lados; ou, ſe quizermos, de hum grandiſſimo numero de lados, e proponhamo-nos ſómente de medir a ſuperficie Z (Fig. 9.) formada pela revolução deſte polygono. Depois ſerá facil o paſſar da medição deſta ſuperficie á medição da ſuperficie da esfera, aſſim como paſſamos da medição das figuras rectilineas á medição do circulo.

LXII.

Para ſe medir a ſuperficie do ſólido Z, examinemos a pequena parte deſta ſuperficie, que hum ſó lado produz, qualquer, M *m* do polygono inſcripto, em quanto eſte faz huma revolução á roda do diametro AB. He evidente que o lado M *m* (Eſtampa EST. XIV. XIV. Fig. I.) deſcreve neſte movimento huma ſuperficie de pyramide

P có-

EST. XIV. cónica troncada V. Porque produzindo-se a recta M *m* até que ella encontre em T o diametro, ou exo da revolução AB, se esta recta TM *m* gyrar ao mesmo tempo com o semicirculo AMB, descreverá visivelmente huma pyramide cónica recta, da qual será vertice T, e a base o circulo descripto pelo ponto *m*, de sorte que a superficie V formada pelo movimento de M *m* será huma porção da superficie desta pyramide cónica, comprehendida entre os planos dos circulos, que os pontos M, e *m* descrevem, fazendo o seu gyro. Mas como temos visto (Artigo LIX.), a superficie V he igual a hum rectangulo, de que M *m* he a altura, e a base huma linha igual á circumferencia KLO descripta pelo ponto K, meio de M *m*. Logo a superficie formada pela revolução do polygono he igual á somma de tantos rectangulos desta natureza, quantos lados este polygono tiver, taes como M*m*.

Ora

Ora como todos os lados M *m*, EST. XIV. alturas deftes rectangulos, fe fuppõem ferem iguaes, fe poderá confiderar fer a fuperficie que fe procura como hum rectangulo total, que terá a altura M *m*, com huma bafe igual á fomma de todas as circumferencias, taes como KL, ifto he, defcriptas pelo ponto do meio de cada pequeno lado.

Porém o polygono infcripto no femicirculo AMB, tendo hum grandiffimo numero de lados, a pequenez da altura M *m*, e a exceffiva grandeza da bafe fariam que efte rectangulo foffe inconftructivel.

Para fe remediar efte inconveniente, he muito facil de idear o reduzir todos eftes pequenos rectangulos em outros, que tenham fempre huma mefma altura, não imperceptivel como M *m*, mas baftantemente grande, para que cada huma das bafes venha a fer muito mais pequena; e mediante ifto, a addição de

EST. XIV. todas as pequenas bafes, não farão mais do que hum comprimento comparavel com a altura.

LXIII.

Vejamos pois fe poderiamos mudar defte modo os noffos pequenos rectangulos. Supponhamos, por fimplificar o problema, que os noffos rectangulos em lugar de terem por bafes linhas iguaes ás circumferencias KL, (Fig. 1. e 2.) não tenham por bafes fenão os radios KI das mefmas circumferencias. Depois não nos ferá difficil de applicar aos rectangulos verdadeiros, o que tivermos achado neftes ultimos rectangulos fuppoftos.

Logo he neceffario achar hum rectangulo, que tenha por medida o producto de Mm por KI, mas que tenha por altura huma linha incomparavelmente maior do que M m, e que feja a mefma em qualquer parte que efteja efte pequeno lado Mm.

Mm. Façamos eſcolha, por exemplo, da recta CK, que he o apothema do polygono de que M *m* he lado, e por conſequencia he ſempre a meſma a qualquer lado do polygono a que ella pertença. Devemos pois procurar huma linha, cujo producto por CK ſeja igual ao producto de KI por M *m*; iſto he, (Part. II. Art. VII.) que he neceſſario achar a quarta proporcional ás tres linhas KC, KI, M *m*. Ora nós ſabemos que por meio dos triangulos ſemelhantes he que ſe acham as linhas proporcionaes nas figuras; he pois neceſſario formar triangulos ſemelhantes, cujos lados homologos ſejam as linhas de que ſe trata; o que ſe fará, abaixando MR, perpendicular a *mp*. Então teremos os triangulos M *m* R, KIC, que ſerão ſemelhantes; porque cada hum delles ſerá rectangulo, hum em R, e o outro em I; e demais, elles terão os angulos *m* MR, IKC iguaes EST. XIV.

en-

EST. XIV. entre ſi, porque o primeiro juntamente com o angulo MmR, igual ao angulo MKI, faz hum angulo recto; e o ſegundo IKC faz tambem hum angulo recto juntamente com MKI.

Do que facilmente ſe póde concluir, que KC he para KI, como Mm he para MR; iſto he, que MR he a quarta proporcional procurada; ou, que vem a ſer o meſmo, que o rectangulo de KC por MR, ou por Pp, he igual ao rectangulo de Mm por KI.

Porém como o rectangulo, que pertendiamos mudar, não he aquelle de Mm por KI, mas ſim o de Mm pela circumferencia, da qual he radio KI, aqui nos lembraremos que as circumferencias são entre ſi, como o são os ſeus radios; e que por conſequencia, ſendo iguaes os rectangulos de Mm por KI, e o de Pp por CK, o devem ſer tambem os rectangulos de Mm pela circumferen-

cia

cia de KI, e o de P p pela circumfe- EST. XIV.
rencia de CK; porque facilmente fe vê, que fe dous rectangulos são iguaes, e confervando-lhes as fuas alturas fe lhes augmentam proporcionalmente as fuas bafes, eftes rectangulos ficaráõ fempre iguaes.

LXIV.

Tendo-fe demonftrado nos dous Artigos precedentes, que todas as pequenas fuperficies cónicas troncadas, taes como V (Fig. 1. e 2.) são iguaes a outros tantos rectangulos, que tiverem todos por altura huma mefma recta igual á circumferencia, da qual feja radio KC; e cada hum dos quaes tenha por bafe huma pequena recta P p correfpondente a cada lado Mm, fe póde difto deduzir, que huma fomma, qualquer, deftas pequenas fuperficies tomada defde A até p, por exemplo, ferá igual a hum rectangulo, que tiver por

EST. XIV. por altura huma recta igual á circumferencia de CK, e por base a somma de todas as linhas taes, como P *p*, tomadas desde A até *p*, isto he, a recta A *p*.

Logo para se ter a superficie total produzida pela revolução do polygono inteiro, será preciso fazer hum rectangulo, a base do qual seja igual á circumferencia descripta pelo radio CK, e que tenha huma altura igual ao diametro AB.

LXV.

A superficie da esfera tem por medida o producto do seu diametro.

Agora he muito facil de medir a superficie da esfera; porque he certo que quantos mais lados tiver o polygono, tanto mais o sólido formado pela sua revolução se avizinhará a ser igual á esfera, e tambem o apothema CK se appropinquará mais a ser igual ao radio, de sorte que podendo-se imaginar que o polygono se tenha reduzido a cir-

cu-

culo, o apothema CK ferá o mefmo radio, e a fuperficie da esfera terá a mefma extensão, que tiver hum rectangulo, cuja altura ferá o diametro, e a bafe huma linha igual á circumferencia do circulo, de donde fe formou, que ordinariamente fe chama o circulo maximo da esfera.

EST. XIV. pela circumferencia do feu circulo maximo.

LXVI.

Quanto á fuperficie curva de hum fegmento de esfera AMLNO; (Fig. 3.) ifto he, da parte de esfera, que della fe diminue, quando fe córta por hum plano MLNO, perpendicular ao diametro, efta tem por medida o producto da fua groffura, ou flexa AP pela circumferencia do circulo maximo AMBN. A razão difto he a mefma, com a qual fe provou (Art. LXIV.) que a fomma das fuperficies de todas as pequenas pyramides cónicas troncadas, comprehendidas defde A até *m*, (Fig. 2.) he igual ao rectangulo, cuja altura he

Que coufa feja hum fegmento de esfera.

Como fe mede a fua fuperficie.

EST. XIV. he A p, e a baſe huma linha igual á circumferencia, de que he radio CK.

LXVII.

A precedente medição da ſuperficie da esfera nos enſina, que fazendo-ſe dar huma volta ao rectangulo ABDE, (Fig. 4.) e ao meſmo tempo ao ſemicirculo AMNB á roda de AB, a ſuperficie curva do cylindro recto EFGIKDH formada pela revolução deſte rectangulo, ſerá igual áquella da esfera deſcripta pelo ſemicirculo; o que ordinariamente ſe exprime deſte modo; a ſuperficie da esfera he igual á do cylindro circumſcripto.

A ſuperficie da esfera he igual á do cylindro circumſcripto.

LXVIII.

Os ſegmentos cortados do cylindro, e da esfera, tem a meſma ſuperficie.

Se ſe cortaſſem tanto o cylindro, como a esfera por dous planos, quaeſquer que ſejam, perpendiculares ao diametro AB em P, e em Q, as porções cortadas da esfera, e do do cylindro, nascidas do movimento da recta OS, e do arco MN, seriam iguaes em superficie. EST. XIV.

LXIX.

A superficie da esfera he igual a quatro vezes aquella do seu circulo maximo.

Tambem do que fica dito se vê que a superficie da esfera he igual á área do seu circulo maximo quatro vezes; porque a superficie deste circulo maximo tem por medida o producto de a metade do radio, ou do quarto do diametro pela circumferencia, e a superficie da esfera he igual ao producto do diametro todo pela mesma circumferencia.

LXX.

Tendo-se achado a medida da superficie da esfera, he muito facil o medir a sua solidez; porque póde-se considerar a esfera como hum ajuntamento de huma infinidade de pequenas pyramides, os vertices das quaes estejam no centro della, e as

suas

EST. XIV. ſuas baſes cubram toda a ſuperficie. Ora cada huma deſtas pyramides tendo por medida o producto do terço da ſua altura, iſto he do radio, pela ſua baſe, a ſomma total dellas, ou a ſolidez da esfera, ſe medirá, multiplicando o terço do radio pela ſua ſuperficie, iſto he por quatro vezes a área do circulo maximo.

A ſolidez da esfera he o producto do terço do ſeu radio por quatro vezes a área do circulo maximo.

LXXI.

Como o producto do terço do radio, por quatro vezes o circulo maximo, he a meſma couſa que o producto de quatro vezes o terço do radio, iſto he dos dous terços do diametro pelo maximo circulo, e que a ſolidez do cylindro EFGIKDH tem por medida o producto do diametro pelo meſmo circulo maximo, que lhe ſerve de baſe, ſegue-ſe que a ſolidez da esfera he os dous terços daquella do cylindro circumſcripto.

A ſolidez da esfera he os dous terços da do cylindro circumſcripto.

Se

LXXII.

EST. XIV.

Medida da ſolidez de hum ſegmento de esfera.

Se nos propuzermos o medir a ſolidez de hum ſegmento de esfera AMLNO, (Fig. 3.) he evidente que ſería preciſo medir primeiramente a porção da esfera formada pela revolução do ſector CAM; o que ſe faria, multiplicando o terço do radio pela ſuperficie do ſegmento de esfera propoſto AMLNO: depois ſe diminuiria deſta medida aquella da pyramide cónica formada pela revolução do triangulo CPM, iſto he, a pyramide cónica, que tem por baſe o circulo MLNO, e CP por altura, e o reſto ſeria o valor pedido do ſegmento.

LXXIII.

Daremos fim a eſtes Elementos com algumas Propoſições ſobre a ſolidez, e a ſuperficie dos corpos ſemelhantes. Eſtas Propoſições ſe apreſentam naturalmente, fazendo-ſe refle-

EST. XIV. flexão ſobre o que conſtitue a ſemelhança de dous corpos. Até ſe póde dizer, que ſe não póde abſolutamente deixar de as deſcubrir por analogia, ſe nos lembrarmos do que diſſemos (Part. I. Art. XXXIV. e ſeguint.) da ſemelhança das figuras planas, iſto he daquellas, que são deſcriptas ſobre planos.

No Artigo XXXII. temos determinado em que conſiſte a ſemelhança de duas pyramides; a definição, que então démos das pyramides ſemelhantes, ſe póde eſtender a todos os corpos terminados por planos, iſto he, que dous corpos deſta natureza ſe chamam ſemelhantes, ſe todos os angulos formados pelos lados do primeiro são os meſmos, que são os angulos formados pelos lados do ſegundo, e ſe os lados de hum deſtes corpos são proporcionaes aos lados homologos do outro.

Em que conſiſte a ſemelhança de dous corpos terminados por planos.

Quan-

LXXIV.

Quanto aos corpos, que não são terminados em todas as ſuas partes por planos, por exemplo, os cylindros, e as pyramides cónicas, tambem he facil de determinar as condições neceſſarias para ſerem ſemelhantes. EST. XIV.

Condições, que determinam a ſemelhança de dous cylindros rectos.

Dous cylindros rectos ſerão ſemelhantes, ſe as ſuas alturas eſtiverem na meſma razão dos radios das ſuas baſes.

LXXV.

A de dous cylindros obliquos.

Se os cylindros forem obliquos, ſerá de mais neceſſario que as linhas, que ſe unem aos centros dos dous circulos em cada hum deſtes cylindros, façam os meſmos angulos ſobre os planos das ſuas baſes.

LXXVI.

A de duas pyramides cónicas.

As meſmas definições ſe podem applicar ás pyramides cónicas, pondo

EST. XIV. do em lugar das linhas, que paſſam pelos centros das duas baſes do cylindro, aquella, que vai do vertice da pyramide cónica ao centro do circulo, que lhe ſerve de baſe.

LXXVII.

A de duas pyramides cónicas troncadas.

Para que duas pyramides cónicas troncadas ſejam ſemelhantes, he preciſo em primeiro lugar que as pyramides cónicas, de que ellas são porções, ſejam huma a outra ſemelhantes; e em ſegundo lugar, que as ſuas alturas eſtejam entre ſi como os radios das ſuas baſes.

LXXVIII.

As esferas, os cubos, e todas as figuras, que não dependem ſenão de huma ſó linha, são todas ſemelhantes.

A reſpeito das esferas, muito bem ſe vê que ellas são todas ſemelhantes humas ás outras, como tambem o são todas as figuras, ſejam ſólidos, ou ſejam planos, que não neceſſitam mais do que huma ſó linha para ſerem determinadas, como o circulo, o quadrado, o triangulo equiéquilatero, o cubo, o cylindro circumſcripto á esfera, &c. EST. XIV.

LXXIX.

Em geral ſe poderá dizer das figuras ſólidas ſemelhantes, como ſe diſſe das figuras planas, que ellas não differem ſenão pelos petipés, por onde são conſtruidas.

Em geral os ſolidos ſemelhantes não differem ſenão pelos petipés, por onde são conſtruidos.

Iſto ſómente que ſe tem expoſto, bem conſiderado, conduz a duas propoſições fundamentaes ſobre a ſuperficie, e ſobre a ſolidez dos corpos ſemelhantes.

LXXX.

A primeira propoſição enſina, que as ſuperficies de dous corpos ſemelhantes são entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos; que ha, por exemplo, a meſma razão entre as ſuperficies das duas pyramides ſemelhantes z, e Z, (Fig. 5. e 6.) como entre os quadrados $abcd$, ABCD, feitos ſobre os lados

As ſuperficies dos ſolidos ſemelhantes são entre ſi, como os quadrados dos ſeus lados homologos.

EST. XIV. *a b*, AB, que se correspondem nestas duas pyramides.

Para se demonstrar esta proposição, não se necessita mais do que dos discursos, que fizemos na I. Parte Art. XLIII. e XLIV. isto he, que basta sómente considerar que se P he o petipé da pyramide Z, e *p* o petipé da pyramide semelhante *z*, as linhas, de que se usar para se medir a superficie Z, e a do quadrado ABCD, terão o mesmo numero de P, como haverá de partes *p* naquellas, de que se usar para medir a superficie *z*, e a do quadrado *a b c d*.

Porque disto se segue, que o producto das linhas, que entrarem na medida de Z, e de ABCD, dará o mesmo numero de quadrados X feitos por P, como o producto das linhas, de que se usar. para medir *z*; e *a b c d*, dará de quadrados *x* feitos por *p*. Isto he, que os numeros, que exprimirem a proporção da superficie da pyramide Z para o quadradrado ABCD, ſerão os meſmos que os que exprimiráõ a proporção da ſuperficie z para o quadrado *a b c d*. EST. XIV.

O meſmo diſcurſo ſe faria na comparação de todos os mais corpos ſemelhantes, ſeja que eſtes corpos foſſem terminados por planos, ou que elles foſſem terminados por ſuperficies curvas; porque as linhas, que ſerviſſem para ſe medirem as ſuperficies de todos eſtes corpos, teriam ſempre o meſmo numero de partes dos ſeus petipés, e por conſequencia os productos deſtas linhas conteriáo hum meſmo numero de vezes os quadrados deſtas meſmas partes.

E ſe as linhas neceſſarias para ſe medirem as ſuperficies dos corpos ſemelhantes foſſem incommenſuraveis, he evidente que a demonſtração ſempre ſubſiſtiria, com tanto que niſto ſe uſaſſe dos principios, de que nos ſervimos (Part. II. Art. XXVIII.) para comparar as figuras

Q ii ſe-

EST. XIV. semelhantes, cujos lados erão incommensuraveis.

LXXXI.

As superficies das esferas são entre si, como os quadrados dos radios dellas.

Da mesma sorte se provaria que as superficies das esferas são entre si, como são os quadrados dos radios dellas. Porém para de outro modo o vermos mais claramente, bastará lembrar-nos que as superficies dos circulos são entre si, como os quadrados dos seus radios, (Part. III. Art. VI.) e que as superficies das esferas são quadruplas dos seus circulos maximos. (Art. LXIX.)

LXXXII.

A proporcionalidade entre as superficies dos corpos semelhantes, e os quadrados dos seus lados homologos, he tão geral, que ella se applica tanto aos corpos, que se sabem medir, como áquelles, cuja medição ainda não he conhecida.

Sem se saber medir, por exemplo,

plo, a ſuperficie de hum cylindro obliquo, ſe póde affirmar que as ſuperficies de dous cylindros obliquos ſemelhantes são entre ſi, como os quadrados dos diametros das baſes deſtes cylindros. Porque inſcrevendo neſtes dous cylindros dous priſmas ſemelhantes de quantas faces ſe quizer, ſe verá pelo que fica dito, que as ſuperficies deſtes priſmas eſtão entre ſi, como os quadrados dos diametros das baſes. Logo os meſmos cylindros, conſiderados como os ul- priſmas inſcriptos, terão as ſuas ſuperficies na meſma razão. EST. XIV.

LXXXIII.

A propoſição fundamental para a comparação da ſolidez dos corpos ſemelhantes he a ſeguinte.

Os ſolidos ſemelhantes são entre ſi, como os cubos dos ſeus lados homologos.

Os ſólidos ſemelhantes eſtão entre ſi, como os cubos dos ſeus lados homologos.

Póde-ſe demonſtrar eſta propoſição

EST. XIV. ção como a precedente, conſiderando que as figuras ſemelhantes não differem ſenão pelos petipés, por onde ellas ſe conſtruem.

Para o moſtrar o mais ſimpleſmente que nos he poſſivel, nos ſerviremos, por exemplo, de dous priſmas ſemelhantes Z, e z, (Fig. 7. e 8.) e de dous cubos X, e x, cujos lados são iguaes a AB, ab, linhas analogas neſtes dous priſmas; e demais tomaremos dous petipés AB, ab, divididos em hum grandiſſimo numero de partes, para ſe poderem medir as dimensões deſtes ſólidos. Ora iſto ſuppoſto, claro eſtá que igualmente ſe acharáõ tantos cubos feitos pelas partes de ab no priſma z, e no cubo x, quantos ſe acharem feitos pelas partes de AB no priſma Z, e no cubo X.

Para todos os mais ſólidos ſe faria o meſmo diſcurſo; e aquelles, que tiveſſem dimensões incommenſuraveis, eſtariam tambem na meſ-

ma

ma razão, em que eſtão os cubos dos ſeus lados homologos. EST. XIV.

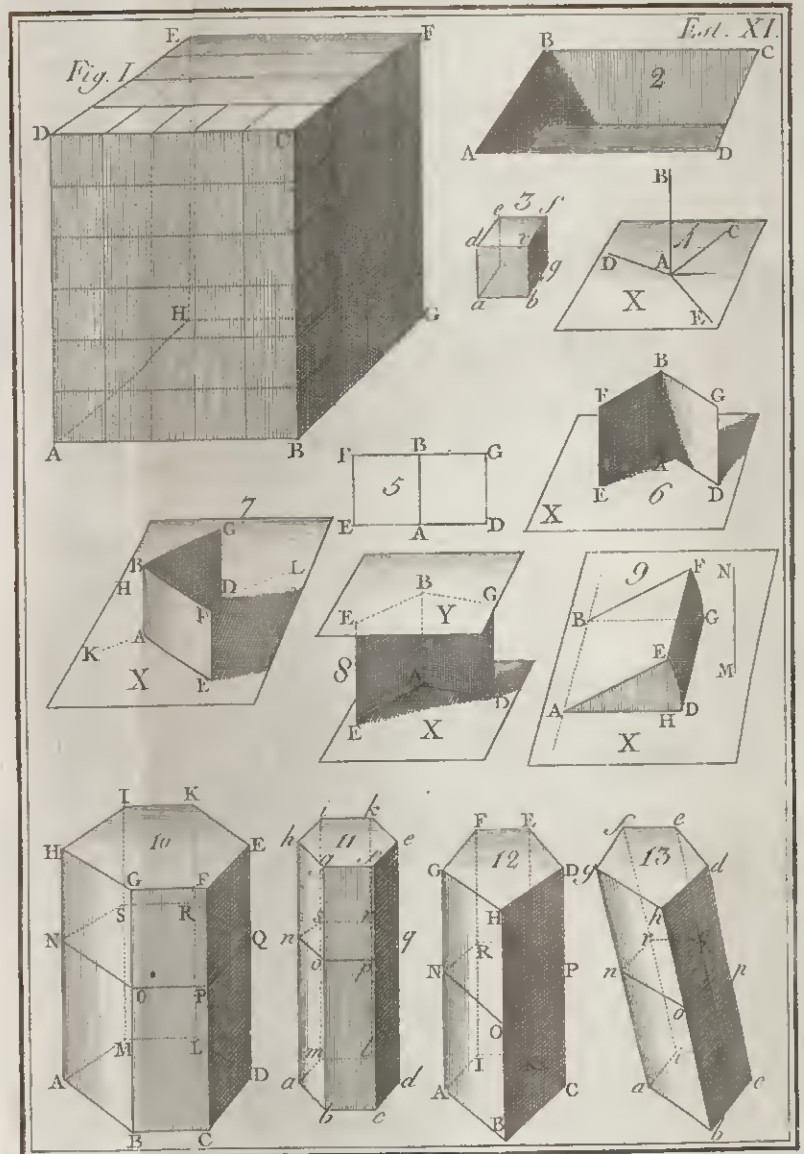
LXXXIV.

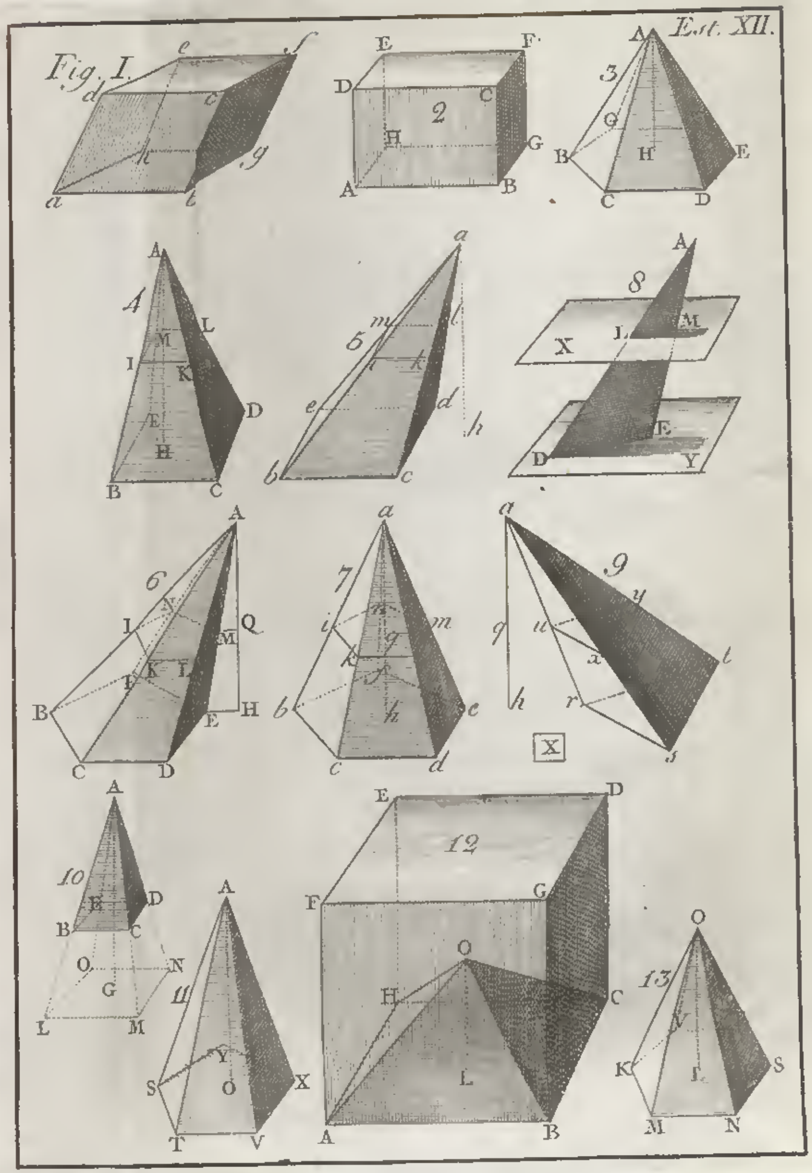
Os ſolidos das esferas, por exemplo, são evidentemente entre ſi, como os cubos dos radios dellas.

As esferas são entre ſi, como os cubos dos radios dellas.

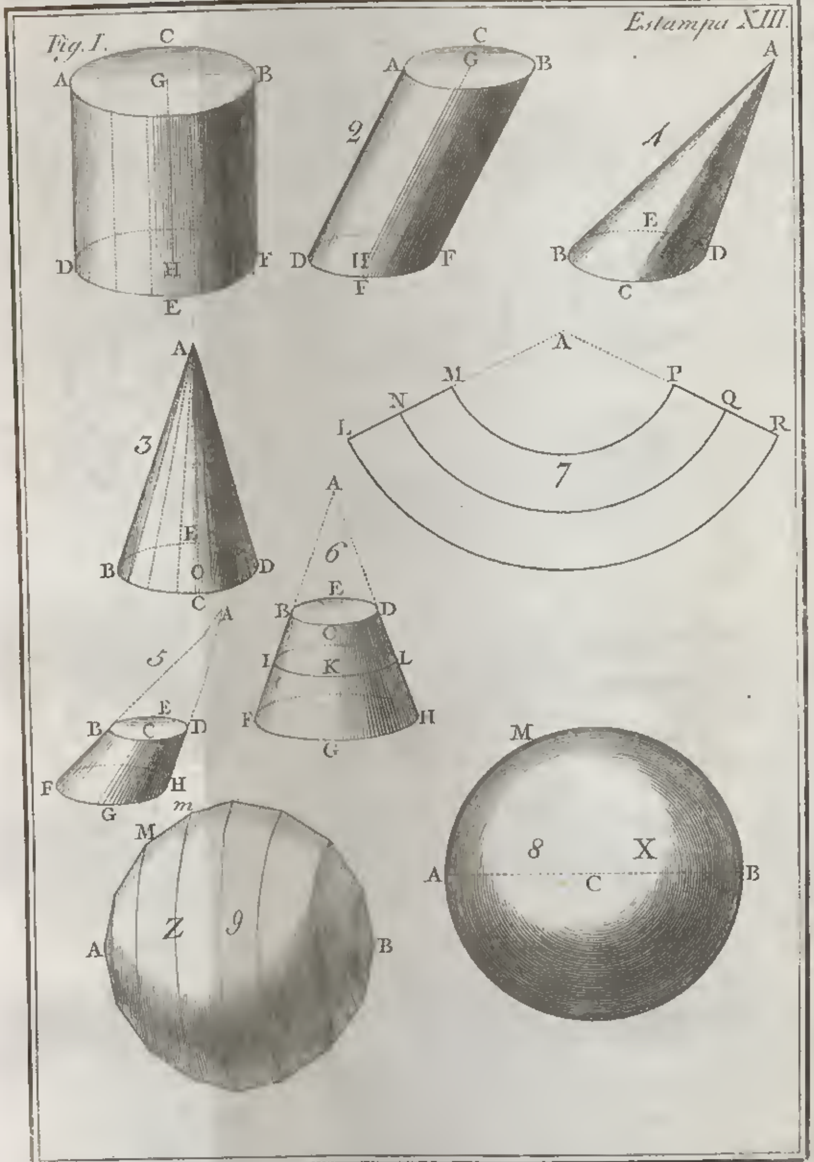
F I M.

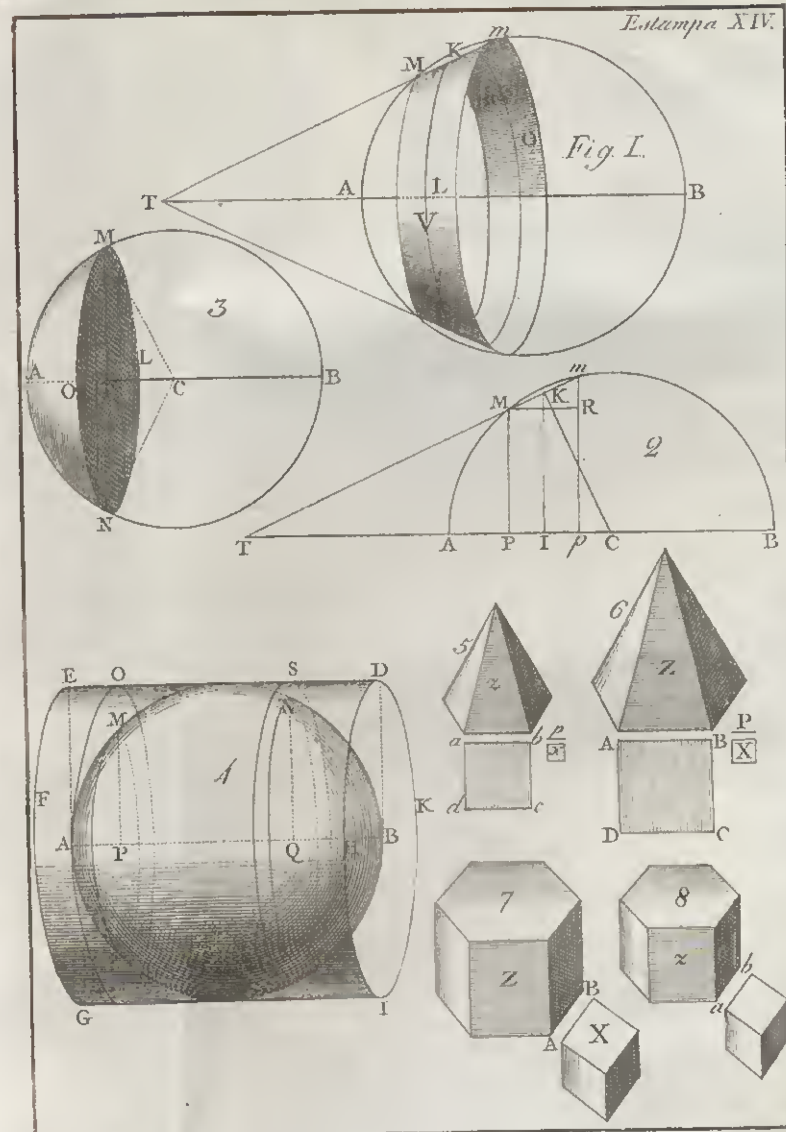
IN-


Est. XI.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13


Est. XII.
Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Estampa XIII.




Estampa XIV.
Fig. I.
T
A
L
B
M
K
m
O
V
3
N
C
2
R
P
I
ρ
4
E
S
D
F
K
H
Q
G
5
6
Z
z
a
b
d
c
X
7
8

INDICE DAS MATERIAS.

PARTE PRIMEIRA

Dos meios, de que era mais natural se usasse, para se chegar á medição dos Terrenos.

Ti-

XVII.

e os

PARTE SEGUNDA

Do methodo geometrico de comparar as Figuras rectilineas.

XXIV.

PARTE TERCEIRA

Da medição das Figuras circulares, e das suas propriedades.

Tem

Ma-

PAR-

PARTE QUARTA

Da maneira de medir os sólidos, e as suas superficies.

XVI.

mas

LXXVI.

FIM DO INDICE.

AVISO

Para se situarem as Estampas nos seus respectivos lugares.

PARTE PRIMEIRA.

As Estampas I. II. III. IV. V. VI. entre a pag. 76. e 77.

PARTE SEGUNDA.

A Estampa VII. entre a pag. 108. e 109.

PARTE TERCEIRA.

As Estampas VIII. IX. X. entre a pag. 150. e 151.

PARTE QUARTA.

As Estampas XI. XII. XIII. XIV. depois da pag. 225.