António Brotas

O essencial sobre

A TEORIA DA RELATIVIDADE

incm

António Brotas

O essencial sobre

A TEORIA DA RELATIVIDADE

incm

Este livro é dedicado ao meu Avô,
professor António dos Santos Lucas,
que, no ano lectivo de 1922-23,
deu na Faculdade de Ciências de Lisboa
um curso de Relatividade Restrita e Generalizada.

I

A CONCEPÇÃO ARISTOTÉLICA

1.1 *A atitude ancestral*

A atitude habitual do homem face ao mundo que o rodeia é a de distinguir o que considera normal e se dispõe a aceitar sem qualquer explicação, do que lhe parece excepção, ou seja, fora da regra da normalidade, e que como tal exige explicação.

A concepção ancestral do mundo, que aqui designaremos por aristotélica por ter sido Aristóteles (384-322 a. C.) quem a formalizou de um modo mais elaborado, era e é, pois numa larga medida ainda a adoptamos, quanto mais não seja ao nível do nosso comportamento instintivo, basicamente a seguinte:

1) Há um referencial privilegiado que é o da Terra (no sítio em que estamos é o do solo);
2) O estado normal dos corpos (que não exige explicação) é o do repouso neste referencial;
3) Os movimentos em relação à Terra são as excepções (que exigem explicação).

A partir deste enquadramento ancestral e milenário, naturalmente aceite porque condizente com a generalidade das observações mais imediatas, e ultrapassadas respostas de índole religiosa, a procura e explicitação de explicações, ou de esboços de explicações, já foi trabalho de cientistas, filósofos, ou, pelo menos, de construtores da linguagem.

Podemos detectar vários níveis explicativos. Comecemos pela frase:

4) «Os movimentos são provocados por forças».

Nesta explicação os movimentos aparecem como efeitos e as forças simplesmente como as causas dos movimentos. Não se trata, no entanto, de uma explicação puramente verbal. As forças que aparecem relacionadas com os movimentos são também usadas em Estática. Podendo ser de natureza muito diversa, são, em princípio, detectáveis de algum modo. As situações inexplicáveis (incompreensíveis) nesta concepção são pois aquelas em que se verificam movimentos e não é detectado nada que possa ser identificado com uma força.

1.2 *O contributo de Aristóteles*

Aristóteles relacionou de um modo mais preciso os movimentos com as forças com o enunciado:

4′) «Forças constantes provocam movimentos constantes».

Convenhamos que é uma afirmação bastante condizente com as observações correntes num mundo rural, por exemplo, de cavalos a puxar carroças. Nela, mais do que na anterior, as forças ganham o estatuto de causas activas que mantêm os corpos em movimento.

O mesmo Aristóteles deu um passo em frente com a afirmação:

4″) «As velocidades são proporcionais às forças».

Embora errada, como o sabemos hoje, esta afirmação teve uma imensa importância. Foi para a exprimir, com efeito, que pela primeira vez foi usado em Física o sinal de igual, ou algo de equivalente. Por outras palavras, embora errada, foi o início da Física Matemática.

Aristóteles sabia que a afirmação 4″ era falsa, pelo menos nalguns casos. Ele próprio fez notar que, dependendo a velocidade de um barco arrastado num estaleiro do número de operários que o empurra, abaixo de um número mínimo de operários o barco não se move.

Aristóteles não deixou, no entanto, de afirmar 4″, guiado pela genial intuição de que a Física teria de ser matemática. Dispunha de uma grandeza para caracterizar o movimento: a velocidade. Os movimentos estavam relacionados com as forças (mensuráveis, por exemplo, pelo número de operários que empurravam o barco). Devia haver uma relação matemática entre uma coisa e outra. O que fez foi postular a mais simples condizente com o enquadramento geral previamente aceite: a proporcionalidade, que associava a ausência de forças ao estado natural de repouso.

1.3 *O ímpeto*

A concepção aristotélica com a inclusão da lei 4″ goza de uma absoluta coerência interna que lhe permitiu manter-se como concepção básica do mundo durante mais de mil e quinhentos anos, mau grado alguns flagrantes desmentidos experimentais.

Um problema muito discutido na Idade Média foi o da explicação do movimento de uma pedra lançada com a mão. Na primeira fase do movimento a pedra movia-se porque a mão exercia sobre ela uma força. Mas na fase seguinte, depois de se separar da mão, como podia ser compreendida a continuação do movimento da pedra se já nenhuma força visível se exercia sobre ela?

Esta observação pertinente, que punha a nu a deficiência da concepção aristotélica, não foi, no entanto, suficiente para a fazer pôr de lado.

O homem só se dispõe a abandonar um quadro explicativo coerente e global quando é capaz de o substituir por outro. Como em alternativa à concepção aristotélica nada existia, os pensadores empenharam-se em imaginar um acrescento «ad hoc» que permitisse no seu âmbito explicar o movimento da pedra. (Quando não há condições ou génio para substituir uma concepção global, aparece sempre gente com engenho para se adaptar dentro dela).

Surgiu assim a doutrina do ímpeto. A mão, na fase inicial do movimento, transmitiria à pedra um ímpeto que na fase seguinte a arrastaria à medida que se consumia. O ímpeto permitia assim uma espécie de efeito retardado das forças com o que dava resposta aos mais flagrantes desmentidos experimentais da concepção aristotélica. Não admira que tenha tido vida longa.

Ainda hoje, na nossa linguagem corrente, empregamos frases do género: «Arrastado pelo ímpeto, o carro foi chocar contra uma parede.»

É uma linguagem medieval condizente com a concepção aristotélica.

1.4 *A queda dos corpos*

Um outro problema é o da queda dos corpos. Mas, aqui, o fenómeno é tão permanente que foi considerado natural. Numa primeira fase, o verificar-se *sempre* pode ser considerado como explicação natural, como transparece destas respostas de uma criança (Luísa) de quatro anos:

— Porque é que os corpos caem?
— Porque caem sempre.
— E porque é que os aviões não caem?
— Porque têm motor.
— E porque é que os balões não caem?
— Não sei.

Os movimentos na horizontal e na vertical foram, durante muito tempo, olhados de modo diferente. Os segundos, em que o natural (o habitual) é a queda e não o imobilismo, são, no entanto, conciliáveis com a concepção aristotélica, ou pelo menos não a contradizem de imediato, dado haver uma força vertical, o peso dos corpos, que a Estática há muito considerava nos problemas de equilíbrio e o nosso corpo sente directamente.

A queda dos corpos ficou o grande laboratório à espera de quem se lembrasse e tivesse engenho para testar a lei 4″ de Aristóteles. E o grande problema que era o de explicar o que era o peso ficou durante muito tempo ofuscado por frases do tipo: «A pedra cai porque o seu lugar natural é em baixo.»

1.5 *A Astronomia na Antiguidade*

Na Cosmologia da Antiguidade a Terra ocupava o centro do Universo. O problema era se estava fixa e a esfera celeste rodava, ou se era a esfera celeste que estava fixa e a Terra rodava em torno do seu eixo.

Embora na altura não se atribuísse à Física terrestre validade no espaço celeste, pode-se suspeitar que Aristóteles entendia que a Terra estava fixa, mais por adesão à concepção global de um único referencial privilegiado (que parecia só poder ser o da

Terra) do que propriamente pelo peso de qualquer argumento mecânico. A concepção aristotélica estendeu-se assim do espaço junto ao solo ao espaço celeste.

Ptolomeu (90-168), na continuidade de Aristóteles, argumentava que a Terra não podia rodar porque nesse caso a sua matéria se dispersaria no Universo. A argumentação só errava na exagerada avaliação do efeito.

Se Ptolomeu argumentava é porque o ponto de vista contrário era defendido, ou pelo menos considerado. A discussão e os argumentos tinham, porém, um carácter mais mecânico que propriamente astronómico. Os movimentos dos planetas e do Sol referidos ao pano de fundo das estrelas não são influenciados pela rotação da Terra sobre ela própria, dado ser insignificante o seu diâmetro. Para dar conta da complexidade desses movimentos, Ptolomeu inventou a engenhosa construção dos epiciclos (em que os planetas descrevem círculos cujos centros descrevem círculos em torno da Terra) que, com razoável rigor, permitiu sistematizar os resultados das observações. Alguns séculos antes, o astronómo Aristarco (320-230 a. C) já tinha defendido que a Terra rodava em torno dela própria e em torno do Sol. Mas estas ideias, hoje aceites, não se impuseram por não estarem integradas numa concepção global, e Aristarco foi considerado um ímpio.

A concepção de um referencial único e privilegiado, o da Terra, em relação ao qual junto ao solo o repouso era o estado normal, e nos céus os astros descreviam movimentos considerados naturais (circulares ou obtidos pela sua composição) foi, assim, a grande e única concepção global do mundo que nos deixou a Antiguidade. Embora tivesse manifestas deficiências e nalgumas questões fosse dificilmente conciliável com a realidade, só no século XVII foi substituída por outra. Quando, no início do século XVII os jesuítas portugueses ensinaram no Japão, onde não se sabia que a Terra era redonda, o sistema Ptolomeu, ainda foi um factor de progresso.

II

A CONCEPÇÃO GALILEANA

2.1 *A Astronomia nos tempos modernos*

Copérnico substituiu o esquema de Ptolomeu dos epiciclos, em que a Terra estava fixa e os planetas descreviam órbitas complicadas, por outro mais simples em que o Sol ocupava o centro e os outros planetas, incluindo a Terra, rodavam à sua volta. Para efeitos de sistematização dos resultados das observações, ou seja, dos movimentos do Sol e dos planetas referidos às estrelas, os dois sistemas eram equivalentes.

Havia, no entanto, uma diferença fundamental. No sistema de Copérnico o referencial privilegiado era o definido pelo Sol e pelas estrelas. Era em relação a ele que se devia passar a falar de coisas móveis e coisas fixas. Nele, a Terra descrevia um círculo e, simultaneamente, rodava em torno do seu eixo. Para Copérnico e Galileu (1564-1642) esta rotação era óbvia. Decorria da adopção do novo sistema.

Os juízes de Galileu perceberam também muito bem o problema. A Terra sem rodar em torno do eixo só era possível no sistema geocêntrico de Ptolomeu. A recusa da rotação de Terra era para eles a linha de defesa deste sistema. Daí a importância que lhe atribuíam.

As ideias novas, que retiravam a Terra do centro do Universo, eram tão chocantes na época que Osiander, prefaciador do livro de Copérnico, defendeu que o novo sistema era um simples artifício destinado a facilitar a descrição matemática das aparências. E astrónomos tão importantes como Tycho Brahé continuaram a defender que a Terra não rodava.

2.2 *A crise da Mecânica terrestre*

Copérnico teve grande dificuldade em defender a ideia de que a Terra rodava. Contra ela levantavam-se argumentos que já vinham da Antiguidade: o da dispersão que seria provocada pela rotação e questões como, por exemplo: «Se a Terra roda como se explica que as nuvens e as aves a acompanhem?».

Para responder, Copérnico falava numa «faculdade animal» que manteria coesa a Terra e as suas partes, e dizia que o movimento da Terra era «natural e não violento» e, quanto às coisas que caem ou se elevam, «o seu movimento em geral é duplo, composto de rectilíneo e circular, e o circular une-se ao rectilíneo como a doença ao animal».

Tycho Brahé, resoluto partidário da concepção de Aristóteles, sustentava que no caso de haver rotação um canhão que disparasse para Oriente teria menos alcance do que se disparasse para Ocidente. A bala poderia mesmo não seguir para Oriente no caso da sua velocidade ser inferior à da Terra.

Este argumento foi considerado como tendo uma força «hercúlea» contra a hipótese da rotação diurna da Terra. Posto perante ele, o grande Kepler (1561-1630), partidário de Copérnico, desenvolveu uma laboriosa argumentação em que, manifestamente pouco à vontade, afirmava que a bala iria de igual modo para Ocidente ou Oriente, ou quase, porque, depois de disparada, se manteria ligada à Terra por uma interacção de natureza magnética que a arrastaria.

Foi também com interacções complicadas que Kepler tentou explicar o facto, em que acreditava embora o não tivesse verificado, de num barco em movimento uma pedra largada do topo cair ao pé da base dum mastro.

Copérnico e Kepler, tendo adoptado em Astronomia um referencial privilegiado diferente do da Terra, transferiram para ele a ideia aristotélica de que, nesse referencial, o movimento teria de ser provocado por uma força, e movimentos com velocidades diferentes exigiriam forças diferentes. Daí, o manifesto pouco à vontade com que escreviam e a necessidade dos recursos à «faculdade animal» e ao «arrastamento magnético».

Mais próximo de nós esteve um notável pensador, Giordano Bruno (1548-1600), queimado pela Inquisição em Roma, que elaborou uma noção de sistemas mecânicos que prefigura a noção actual de referênciais de inércia. Para ele, a trajectória de uma pedra deixada cair dependia da velocidade de quem a solta, que em conjunto com a pedra forma um sistema mecânico. A bala do canhão vai de igual modo para Oriente e Ocidente porque pertence ao sistema mecânico da Terra. Não é possível detectar o movimento de um sistema mecânico por meio de experiências realizadas no seu interior por observadores a ele pertencentes. Quase apetece acrescentar: todos os sistemas mecânicos são equivalentes.

Galileu participou nestes debates e teve o mérito de os trazer para a praça pública. Vale a pena transcrever uma passagem dos seus «Diálogos».

Simplício, que personifica o opositor aristotélico, diz: «Num barco em movimento uma pedra caída do topo afasta-se do mastro. Na Terra isso não se passa com a pedra caída de uma torre. É a prova de que a Terra está imóvel.»

Salviati, que personifica o próprio Galileu, pergunta onde é que a experiência foi feita. Simplício diz que ele a não fez, mas que certamente a fizeram os autores que a referem. E, de resto, «o resultado é tão evidente que não deixa dúvidas».

Salviati afirma, então, que a experiência nunca foi feita, e que, no caso de o ser, o resultado será diferente: a pedra cairá ao pé do mastro, pelo que a pedra cair ao pé da torre não prova que a Terra esteja parada nem em movimento.

É a vez de Simplício perguntar a Salviati como é que ele o sabe se não fez a experiência. Salviati responde que mesmo sem experiência está certo do resultado, «pois é necessário que assim seja». E acrescenta que o próprio Simplício, embora diga o contrário, «sabe que não pode ser de outro modo», e ele Salviati é tão bom parteiro de cérebros que é capaz de o fazer confessar.

Galileu, convicto que a Terra rodava (porque acreditava no sistema de Copérnico), e sabendo que a pedra caía ao pé da torre, concluía que a pedra cairia também ao pé do mastro do navio em movimento «porque não poderia ser de outro modo».

A razão de toda esta polémica estava em que a Terra, tendo perdido em Astronomia o seu estatuto de referencial único privilegiado, ainda o guardava aparentemente nas experiências feitas à sua superfície.

O avanço de Galileu e Bruno relativamente a Copérnico e Kepler está, exactamente, em não procurarem explicar, mas simplesmente aceitarem, enquadrarem e afirmarem factos, que põem no mesmo plano, como a pedra cair junto ao mastro do barco em movimento e o imobilismo das nuvens na Terra em rotação. Onde Copérnico e Kepler viam a excepção, eles viam já a normalidade. Estavam em trânsito para uma nova concepção do mundo.

2.3 *As experiências de Galileu*

As concepções vindas da Antiguidade conjugaram-se com o resultado de experiências feitas à superfície da Terra.

A curiosidade de Galileu levou-o a verificar no «laboratório dos corpos a cair» a velha lei de Aristóteles: «As velocidades são proporcionais às forças».

Servindo-se de planos inclinados para aumentar a duração das observações, constatou que os corpos não caem com velocidade constante: em intervalos de tempo iguais percorrem espaços sucessivamente maiores.

A Física, na altura, já estava suficientemente matematizada para, eliminada uma lei, ser necessário substituí-la por outra. Posta de lado a lei da velocidade constante, Galileu substituiu--a pela lei do movimento uniformemente acelerado que as suas experiências, necessariamente grosseiras, pareciam indicar, ou pelo menos não desmentiam, como depois a não desmentiram experiências muito mais precisas.

O movimento uniformemente acelerado passou, pois, a ser a lei da queda dos graves.

Esta lei obrigava a pôr de lado a lei de Aristóteles e impunha uma outra:

«As acelerações são proporcionais às forças».

Esta nova lei, que se verificou ser concordante com a generalidade das situações mecânicas, em particular com as leis do pêndulo descobertas pelo próprio Galileu, foi a génese duma nova concepção do mundo.

2.4 *O Princípio da Relatividade*

Na nova lei a ausência de forças implica movimentos com aceleração nula, ou seja, velocidade constante. Os movimentos com velocidade constante, que incluem o repouso como caso particular, devem, assim, passar a ser considerados movimentos naturais, tal como o repouso era antes considerado o estado natural.

Falar em repouso como estado natural só tinha sentido quando havia um referencial único privilegiado. Falar em movimentos naturais com velocidade constante exige a consideração de uma família de referenciais privilegiados em translação uniforme uns em relação aos outros. São os chamados referenciais de inércia.

A lei fundamental: «As acelerações são proporcionais às forças» é válida quando referida a um qualquer referencial de inércia. Para efeitos de estudo das leis da Física, todos os referenciais de inércia devem estar, pois, em pé de igualdade.

É este o Princípio da Relatividade estruturador da nova concepção da Física.

2.5 *Tempo e simultaneidade*

É difícil falar em tempo. Até agora neste livro a palavra nem uma única vez foi escrita. A noção esteve no entanto implícita sempre que se falou em duração, movimento, velocidade ou aceleração.

Um dos textos mais interessantes sobre o tempo foi escrito no século V por Santo Agostinho (354-430) no livro XI das suas «Confissões»:

> «Que é, pois, o tempo? Quem poderá explicá-lo clara e brevemente? Quem o poderá apreender, mesmo só com o pensamento, para depois nos traduzir por palavras o seu conceito? E que assunto mais familiar e mais batido nas nossas conversas do que o tempo? Quando dele falamos, compreendemos o que dizemos. Compreendemos também o que nos dizem quando dele nos falam. O que é, por conseguinte, o tempo? Se ninguém me perguntar, eu sei: se quiser explicar a quem me faz a pergunta, já não sei. Porém, atrevo-me a declarar, sem receio de contestação, que, se nada sobrevivesse, não haveria tempo futuro, e se agora nada houvesse, não existia o tempo presente».

Este texto devia ser reproduzido nos livros que hoje se escrevem sobre o Big Bang para fazer ver aos leitores (e às vezes aos autores) que o problema da origem do Universo não é o do aparecimento de algo de material num espaço e num tempo pré-existentes, mas sim o do aparecimento conjunto do espaço, do tempo e da matéria.

Neste livro limitamo-nos a dizer que o tempo é a grandeza que se mede com relógios. O relógio mais simples que podemos imaginar é um corpo sólido a rodar. Fugimos assim à dificuldade assinalada por Santo Agostinho de explicar o que é o tempo.

Em Relatividade um problema central vai ser o de relacionar o tempo de lugares afastados. Este problema não se põe em Física Clássica porque dois relógios afastados podem ser teoricamente acertados por um sinal com velocidade infinita. A simultaneidade, *as coisas passarem-se aqui e em locais afastados ao mesmo tempo,* é assim considerada em F. C. uma noção elementar e mesmo intuitiva.

2.6 *Espaço e cinemática dos referenciais*

A palavra espaço tem um significado preciso em Física Clássica quando associada a um corpo sólido indeformável usado como elemento físico de referência. (Os sólidos comuns são suficientemente rígidos para se comportarem como indeformáveis, ou quase, nas experiências correntes). Espaço do referencial, ou espaço físico é, então, o conjunto dos pontos do sólido indeformável considerado, real ou imaginado, e dos seus supostos prolongamentos.

Os geómetras antigos estudaram e descobriram as propriedades do espaço físico. Para isso começaram por medições e observações, isto é, por fazer uma Geometria Física. A Geometria de Euclides, culminar da Geometria grega, era já uma estrutura matemática porque apresentada a partir de axiomas, mas o seu aspecto era ainda muito próximo do da Geometria Física que a tinha inspirado.

Espaço euclideano é hoje uma noção puramente matemática. Aparece em livros onde não é necessário fazer uma única figura. Para a relacionar com a Física há que dizer:

«O espaço de um referencial é um espaço euclideano com três dimensões».

Esta afirmação, em que é relacionado um objecto matemático com uma objecto físico, é um primeiro exemplo do que é uma teoria física.

Na sequência, por um lado, os matemáticos criaram muitos mais objectos geométricos. Por outro lado, os físicos permitem-se entre eles escolher os que lhes são úteis para descrever as propriedades do mundo físico.

Dado um referencial, para representar os seus pontos, os geómetras podem usar diferentes sistemas de coordenadas. Muitas vezes na literatura corrente em Física, e nos próprios textos de Einstein, as expressões *sistema de coordenadas* e *referencial* são usadas como sinónimos. Quando nada dissermos em contrário os sistemas de coordenadas considerados neste livro serão sempre euclideanos.

Considerados dois referenciais S e S' em movimento relativo, os pontos fixos de um são pontos móveis do outro e vice-versa. Sendo $\vec{v_S}$ e $\vec{a_S}$ a velocidade e aceleração de um ponto móvel em relação a S e $\vec{v_{S'}}$ e $\vec{a_{S'}}$ a velocidade e aceleração do mesmo ponto em relação a S', é possível mostrar em Física Clássica, com base, essencialmente, na utilização das noções de simultaneidade e indeformabilidade, que:

$$\vec{v_S} = \vec{v_{S'}} + \vec{V} \quad \text{e} \quad \vec{a_S} = \vec{a_{S'}} + \vec{A} + \vec{v_{S'}} \times \vec{W}$$

($\vec{V}$ e $\vec{A}$ representam a velocidade e aceleração em relação a S do ponto de S' em que está, em cada instante, o ponto móvel considerado; $\vec{W}$ é a velocidade angular de S' em relação a S; $\times$ representa a operação produto externo). Utilizaremos na sequência estas fórmulas.

2.7 *A invariância das equações*

Em cada referencial podem ser usados diferentes sistemas de coordenadas. Conhecidas as fórmulas de transformação entre as coordenadas de dois sistemas, e conhecidas as equações de um fenómeno no primeiro sistema, os físicos podem, por meio de uma operação que dominam bem (pelo menos em Mecânica), conhecer as equações do referido fenómeno no segundo sistema.

Dois físicos que no estudo de um fenómeno usem sistemas de coordenadas associados a referenciais diferentes podem, assim, não só transferir entre si os resultados das observações que fazem como relacionar as equações com que trabalham, que podem ter formas diferentes.

No caso, porém, dos referenciais serem de inércia e das coordenadas serem do mesmo tipo (euclideanas, por exemplo), as equações são necessariamente invariantes, isto é, mantêm a mesma forma na passagem de um sistema de coordenadas para outro.

É esta, com efeito, a tradução em termos de equações do Princípio da Relatividade que afirma a equivalência de todos os referenciais de inércia.

Até 1905, teve-se como certo — era assunto que não levantava dúvidas nem aos grandes físicos nem às crianças das escolas — que as fórmulas de transformação entre as coordenadas euclideanas associadas a dois referenciais de inércia eram:

$$x' = x - Vt \; ; \; y' = y \; ; \; z' = z \; ; \; t' = t$$

(V velocidade de S' em relação a S).

A invariância das equações da Física nas transformações de Galileu passou, assim, a ser tomada como a expressão mesmo do Princípio da Relatividade em Física Clássica.

2.8 *A Mecânica Clássica*

As leis do movimento, tal como aparecem no livro de Newton (1642-1727) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, verdadeiro pilar da ciência moderna, são:

1.ª Lei:

> «Todos os corpos se mantêm no estado de repouso ou de movimento uniforme em que se encontram, a menos que uma força actue sobre eles e os obrigue a mudar de estado.»

2.ª Lei:

> «As mudanças nos movimentos são proporcionais à força motriz e fazem-se na direcção em que a força é impressa.»

3.ª Lei:

> «A acção é sempre igual à reacção, quer dizer, as acções de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e em direcções contrárias.»

Em linguagem diferencial, e usando a noção de massa referida por Newton em páginas anteriores, a 2.ª Lei escreve-se:

$$\vec{f} = m\,\vec{a}$$

É, pois, a lei: «As acelerações são proporcionais às forças», escrita com a indicação adicional de um coeficiente de proporcionalidade específico de cada corpo.

Alguns comentadores permitem-se dizer que a 1.ª Lei é um caso particular da 2.ª, e outros dizem que a 2.ª é uma simples definição de força.

De facto, a 1.ª Lei introduz implicitamente os referenciais de inércia (referenciais em que são uniformes os movimentos dos corpos não sujeitos a forças), em relação aos quais é calculada a aceleração referida na 2.ª Lei.

Por um outro lado, em inúmeros problemas, em particular nos problemas gravitacionais como no próprio livro «Principia» é mostrado, as forças referidas na 2.ª Lei podem ser calculadas a partir do relacionamento dos corpos com a sua vizinhança.

A 2.ª Lei é, pois, uma lei física que permite definir, à custa da força e da aceleração, uma grandeza massa, a que convém chamar *massa inércial.*

Esta grandeza massa, introduzida pela 2.ª Lei, permite falar em centro de massa de um sistema e definir duas grandezas muito importantes: a *quantidade de movimento* e o *momento angular.*

A 3.ª Lei permite mostrar que os movimentos dos centros de massa dos sistemas isolados (sobre os quais se não exercem forças exteriores) são rectilíneos e uniformes (nos referenciais de inércia bem entendido) e que a quantidade de movimento e o momento angular destes sistemas se mantêm constantes.

Estas leis de conservação, particularmente simples e claras e por isso fundamentais, são válidas em todos os referenciais de inércia, que aparecem assim em pé de igualdade como é exigência do Princípio da Relatividade.

Foi o êxito da Mecânica Clássica conjugado com a invariância das suas leis, incluindo a da gravitação, nas transformações de Galileu, que fez os físicos acreditarem no Princípio da Relatividade.

2.9 *A Gravitação*

A explicação do peso dos corpos não deixou de preocupar muitos pensadores. No final do século XVII ainda Descartes explicava a queda de uma pedra mais ou menos do seguinte modo:

«Existe uma matéria celeste que roda em torno da Terra e penetra nos poros de todas as coisas. Devido ao movimento de rotação, esta matéria tende a afastar-se. O ar, que tem muita matéria celeste no seu interior, tende por isso a afastar-se. Mas ao afastar-se deixa atrás de si o vazio. A pedra, que tem os poros mais cerrados e menos matéria celeste no seu interior, tem menos tendência a afastar-se e vem por isso ocupar esse vazio. É esta a origem da força a que chamamos peso».

À escala celeste o movimento dos planetas era explicado pela interacção de turbilhões de matéria celeste.

Estas construções foram durante um largo período consideradas das mais engenhosas construções do espírito humano. E isto numa altura em que Kepler já aperfeiçoara o modelo cosmológico de Copérnico substituindo os movimentos circulares por movimentos elípticos, em que a aceleração apontava sempre para um dos focos com módulo inversamente proporcional ao quadrado da distância a esse foco. Além disso, o mesmo Kepler, numa clara percepção da 3.ª Lei de Newton, já tinha dito que não era só a Terra que atraía a pedra mas também a pedra que atraía a Terra.

Parece, no entanto, caber a Newton o mérito de em primeiro lugar se ter apercebido (possivelmente apercebeu-se num instante depois de uma longa meditação, e é por isso que a história da maçã, mesmo falsa, é uma bela história) que a força que procurava nos céus capaz de manter os planetas nas suas órbitas circulares, ou mais exactamente elípticas, era a mesma que fazia cair a pedra à superfície da Terra.

Para explicar os movimentos de Kepler essa força devia ser dada por:

$$f = G\frac{M M'}{r^2}$$

em que M e M' são atributos dos corpos que se atraem, r a distância que os separa, e G uma constante a determinar experimentalmente.

Não estava à partida provado que este atributo M dos corpos, que designaremos por *massa gravitacional,* fosse igual ou proporcional (a diferença seria uma questão de unidades) à *massa inercial* m que figura na fórmula $f = ma$. Mas Newton defrontava-se com um facto notável: todos os corpos pareciam cair com igual aceleração. Isto só se podia explicar se, em todos os corpos, M e m fossem proporcionais.

Newton fez experiências exaustivas com pêndulos de oiro, prata, chumbo, ferro e outros materiais, e, em todos encontrou as mesmas leis, o que provava a proporcionalidade entre as duas massas, e não veio a ser, até hoje, posto em causa por nenhuma experiência posterior.

Acertando as unidades, podemos, pois, escrever:

$$M = m$$

relação esta que deve ser encarada como uma notável lei da Física.

Newton, depois de descobrir a lei da atracção universal, continuou à procura de uma explicação para esta sua Lei. Qual seria a explicação daquela estranha força calculável por aquela fórmula? O êxito, porém, foi tal, que os físicos, deslumbrados pela concordância dos valores das observações com os resultados dos cálculos, rapidamente se desinteressaram deste tipo de questões. No século XVIII houve assim uma verdadeira mutação da Física. Passou-se de uma Física que tudo pretendia explicar e nada calculava, para uma Física que calculava mas nada explicava. A própria possibilidade de calcular passou a ser tida como explicação. É esta a essência da Física Matemática moderna criada por Newton.

É significativo que, tendo havido uma tão grande resistência à aceitação da gravitação de Newton, denunciada em França como Física estrangeira (o próprio Newton terá dado aulas para salas vazias), os alunos de hoje do secundário a aceitem com tanta facilidade. Consideram-na mesmo uma das leis mais simples. Na expressão que usam: «A lei que dá a força ...», o verbo dar é usado com toda a propriedade. Significa exactamente: permite calcular. Atrás deles há gerações que há muito se desabituaram de pensar à maneira de Descartes.

Já neste século, um pensador solitário, que voltara a reflectir sobre a lei $M = m$, veio dizer (Galileu ter-se-á disso, talvez, muito vagamente apercebido) que era tão natural um corpo cair como ter um movimento uniforme no espaço sem gravitação. É esta a essência da Relatividade Generalizada apresentada por Einstein em 1915.

2.10 *As forças da inércia*

Admitamos que dos dois referenciais S e S' referidos em 2.6 o primeiro é de inércia e o segundo não. (S' poderá ser, por exemplo, o referencial de um autacarro, e S o do solo). Um físico que utilize S para estudar o movimento de um ponto material deverá escrever:

$$\vec{f_S} = m\,\vec{a_S}$$

Um físico que utilise S' deverá escrever:

$$\vec{f_{S'}} = \vec{f_S} = m\,\vec{a_S} = m\,(\vec{a_{S'}} + \vec{A} + \vec{v_{S'}} \times \vec{W})$$

Se este segundo físico desejar usar uma fórmula do tipo da anterior, deverá juntar às forças f, dependentes do relacionamento com o exterior, as mesmas em S e S', as chamadas «forças de inércia» e escrever:

$$\vec{f_{S'}} + \vec{f_t} + \vec{f_c} = \vec{f_S} - m\,\vec{A} - m\,\vec{v_{S'}} \times \vec{W} = m\,\vec{a_{S'}}$$

A $\vec{f_t} = -m\vec{A}$, e a $\vec{f_c} = -m\vec{v_{S'}} \times \vec{W}$ chamamos habitualmente «*força de inércia de transporte*» e «*força de inércia de Coriolis*».

As forças de inércia «explicitam» a diferença entre os referenciais de inércia e não de inércia. Nos primeiros, há igualdade entre a aceleração dos corpos multiplicada pela massa e as forças que os corpos vizinhos sobre eles exercem. Nos segundos, há a considerar a mais as forças de inércia.

Um hiper-relativismo, isto é, uma tentativa para pôr em pé de igualdade todos os referenciais, foi tentado no fim do século XIX por Mach, físico e filósofo vienense.

Mach reconhecia que a física dos referenciais não de inércia parecia bem diferente da Física dos referenciais de inércia, mas fazia notar, também, que nos referenciais de inércia as estrelas estão fixas e nos referenciais não de inércia estão móveis.

Era então possível dizer: «A Física é a mesma em todos os referenciais. Os referenciais não de inércia são aqueles em que as estrelas longínquas estão em movimento. As forças de inércia são devidas ao movimento dessas estrelas longínquas».

A construção tem lógica e coerência. Só que, em Física, lógica e coerência são necessárias mas não suficientes. Já existiam na Física de Aristóteles. É preciso algo mais, que talvez falte na hipótese de Mach. Ao interessar-se pela interacção entre os corpos, Mach reduziu o espaço e o tempo a um cenário matemático a que recusou propriedades físicas. Não terá sido este o caminho da Relatividade, como veremos nas secções a seguir. No entanto, nalguma medida, Mach terá influenciado Einstein, que o cita em textos sobre a Relatividade Generalizada.

De qualquer modo, nem ele nem ninguém conseguiu, até hoje, relacionar, em termos de equações, esses movimentos das estrelas longínquas com as muito vulgares forças de inércia que sentimos dentro dos autocarros.

2.11 *A Inércia e o espaço-tempo*

Quando os estudantes do ensino secundário no estudo dos problemas a uma dimensão traçam num plano dois eixos, um para representar o tempo e outro uma distância (medida num referencial de inércia), eles estão, sem se dar conta, a usar o conceito de espaço-tempo.

Eles sabem que no seu plano os movimentos uniformes das partículas livres são representados por rectas, qualquer que seja a escala usada nos eixos, e mesmo se forem oblíquos. A distância entre dois pontos de um segmento não paralelo aos eixos não tem, no entanto, para eles qualquer significado. Isto quer dizer que conhecem e estão a usar as propriedades afins, mas não as propriedades métricas (relacionadas com o produto interno de vectores) do seu plano espaço-tempo. (Nos problemas espaciais a 2 e 3 dimensões o espaço-tempo tem, naturalmente, 3 e 4 dimensões).

A lei da inércia é, simultaneamente, a descoberta das propriedades afins do espaço-tempo e a sua imposição como conceito fundamental da Física. Ela pode ser enunciada:

«Os movimentos das partículas livres são rectas do espaço-tempo».

Espaço, tempo e inércia são noções sem sentido autónomo separadas uma das outras. (Sem inércia, seria um caos absoluto e inimaginável, onde não haveria sólidos nem ordem suficiente para se poder falar em espaço ou tempo). O conceito integrador de espaço-tempo é, no entanto, muito subtil, e embora implicitamente presente nunca é citado nos livros de Física Clássica.

Só foi referido pela primeira vez, em 1907, por Minkowski, no quadro já da Relatividade Restrita.

De facto, a Relatividade Restrita é, muito exactamente, a descoberta das propriedades métricas do espaço-tempo.

Tendo a F. C. descoberto as propriedades afins do espaço-tempo, os livros de Mecânica Clássica deviam terminar com a pergunta:

«Qual é a métrica do espaço-tempo?»

Abririam assim a porta à Relatividade em vez de se fecharem sobre si próprios.

III

A ÓPTICA E O ETHER

3.1 *A Física das ondas*

Encontramos frequentemente fenómenos ondulatórios: as ondas à superfície de um lago quando lançamos uma pedra, as vibrações de uma mola, as ondas sísmicas, o som, etc. Numa abordagem muito elementar, podemos dizer que o que caracteriza basicamente os fenómenos ondulatórios, em que os deslocamentos das partículas materiais são em geral pequenos, é o aparecimento de frequências e de uma ou mais velocidades que se revelam de diversos modos: velocidade das cristas das ondas no lago, velocidade do grupo de ondas (algo diferente), velocidade que leva o fenómeno vibratório a chegar, etc.

Paralelamente à física em que a atenção era posta na velocidade e aceleração das partículas materiais, desenvolveu-se uma física das ondas em que a atenção é posta nas alterações globais dos meios contínuos.

Nos meios mecânicos, as equações para estudar estes movimentos são estabelecidas a partir dos princípios de conservação da quantidade de movimento e da energia, e tendo em conta as características próprias dos meios. Estas equações, que começaram a ser estudadas por d'Alembert no século XVIII, têm uma forma muito típica (equações às derivadas parciais de segunda ordem elípticas), que os físicos se habituaram a reconhecer.

No caso mais simples da vibração de uma barra elástica $x = x\ (X,t)$, temos a equação:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} - \frac{\varrho}{E}\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

(ϱ = densidade; E = módulo de elasticidade).

É do mesmo tipo a equação de uma corda a vibrar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{T}\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

(λ = densidade linear; T = tensão).

As equações das ondas indicam-nos os movimentos possíveis dos meios contínuos. Os movimentos que realmente se verificam dependem muitas vezes de causas longínquas. Tem por isso particular interesse conhecer a velocidade de propagação das ondas.

É fácil verificar que as duas equações acima escritas têm soluções do tipo:

$$z = f_1(x - Vt)\ ;\ z = f_2(x + Vt)$$

em que f_1 e f_2 são funções quaisquer duas vezes deriváveis. V, velocidade de propagação das ondas, é imediatamente calculável a partir dos coeficientes que figuram nas equações:

$$V = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{1/2};\quad \left(V = \left(\frac{E}{\varrho}\right)^{1/2} \text{ no caso da barra}\right)$$

Nos meios homogéneos a velocidade de propagação das ondas é a mesma em todas as direcções. Assim, num lago em que as ondas se propaguem com a velocidade V, para os passageiros de um barco que se desloque com a velocidade $v < V$, as ondas provocadas pelo próprio barco deslocam-se na direcção da marcha do barco, para a frente e para trás, com as velocidades V-v e $V+v$, e com a velocidade $(V^2-v^2)^{1/2}$ na direcção perpendicular à marcha. (Este último resultado pode ser obtido por uma construção geométrica relativamente simples). Usaremos estas fórmulas adiante.

Os problemas de propagação das ondas são bastante mais complexos do que as linhas anteriores podem fazer crer. Em particular, surgem fenómenos de interferência e difracção, típicos dos fenómenos ondulatórios, que hoje podemos estudar com equações, mas que nem sempre são simples.

No século XVII houve uma célebre polémica entre Newton e Huygens (1626-1695) sobre a natureza da luz. Newton defendia a concepção corpuscular. Huygens apercebeu-se do seu carácter ondulatório. Embora não conhecesse as equações do fenómeno, imaginou um *ether* com propriedades mecânicas e uma construção geométrica condizente com a ideia de propagação que lhe permitiram explicar vários fenómenos. Foi uma notável antecipação e pode-se dizer que Huygens foi o pioneiro de uma nova vertente da Física.

3.2 *O Electromagnetismo*

Embora alguns fenómenos eléctricos e magnéticos fossem conhecidos deste longa data, a sua compreensão em termos de Física Matemática é relativamente recente. Para ela contribuíram uma série de cientistas: Coulomb, Laplace, Ampère, Faraday, Maxwell (citamos só os mais destacados) cujos trabalhos culminaram nas chamadas equações de Maxwell.

Estas equações que no vácuo se escrevem:

$$rot\ E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$$

$$div\ B=0$$

$$rot\ B=4\pi\mu_o J+\epsilon_o\mu_o\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$div\ E=\frac{4\pi}{\epsilon_o}\varrho$$

são habitualmente estudas no segundo ano das licenciaturas em Engenharia e Física. Não as vamos, naturalmente, aqui explicar. Vamos só dizer algumas coisas sobre elas.

Os símbolos ϱ e J representam, respectivamente, as cargas e as correntes eléctricas que são as «*fontes*» do «campo electromagnético», que aparece descrito pelos campos E e B, respectivamente chamados *campo eléctrico* e *campo magnético*. As notações *rot* e *div* representam operadores matemáticos. ϵ_o e μ_o são duas constantes que desempenham um papel semelhante ao da constante G da gravitação. Os seus valores em unidades do sistema MKSA (metro, quilograma, segundo, ampere) são:

$$\epsilon_o=(8{,}9874.10^9)^{-1};\ \mu_o=10^{-7}$$

O que são os campos E e B? São entidades físicas ou simples instrumentos matemáticos? Como aparecem?

Em 1780 Coulomb escreveu a fórmula:

$$f=\frac{1}{\epsilon_o}\frac{q\,q'}{r^2}$$

que «dá» a força que duas cargas eléctricas exercem uma sobre a outra (força repulsiva ou atractiva conforme as duas cargas tem sinais iguais ou contrários).

Em certa altura, sob o impulso sobretudo de Laplace, passou-se a dizer que a carga q' colocada num ponto O criava o campo eléctrico E, com o valor em cada ponto P do espaço dado por

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \vec{k} \quad ; \quad \vec{k} = \frac{P - O}{r} \quad ; \quad r = |P - O|$$

e que a carga q colocada num ponto onde o campo era E ficava sujeita à força: $\vec{f} = qE$.

Para efeito de cálculo da força os dois enunciados são, em absoluto, equivalentes. Mas as fórmulas não servem só para fazer cálculos, mas também para fazer descrições, suscitar imagens e desenhar o quadro de desenvolvimentos futuros. Neste aspecto, as duas formulações são profundamente diferentes. A primeira descreve uma interacção à distância. A segunda introduz em todos os pontos do espaço um campo que actua localmente sobre as cargas. Todo o desenvolvimento do Electromagnetismo nasceu desta segunda concepção.

O campo E apareceu, assim, no início, como um mero instrumento matemático. Aos poucos, com o desenvolvimento da teoria, os físicos foram-se apercebendo que descrevia algo de existente. O mesmo se passou com o campo magnético B. Em conjunto, estes dois campos são o instrumento matemático com que, ao nível da teoria de Maxwell, estudamos o «campo electromagnético», entidade com existência real, com massa e quantidade de movimento, que sendo uma coisa diferente das coisas mecânicas é descrita de modo diferente.

O curioso, a situação nova, é estarmos perante algo real, mas de que não nos apercebemos directamente, que só nos foi revelada por intermédio das equações explicativas de fenómenos localizados, esses, sim, observáveis.

3.3 *As ondas electromagnéticas e a Óptica*

Os físicos e matemáticos que se debruçaram sobre as equações de Maxwell rapidamente verificaram que a partir delas (no caso $\varrho = o$ e $J = o$) se obtêm as equações do tipo das ondas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0.$$

Estas equações indicam a possibilidade de no vácuo se propagarem ondas com velocidade $V = (\epsilon_o \mu_o)^{-1/2}$. Feitas as contas, encontrou-se para esta velocidade um valor que coincidia muito aproximadamente com o da velocidade da luz já então conhecida ($c = 2{,}9979.10^{10}\ m/s$). Levantou-se, de imediato, a hipótese das ondas luminosas serem ondas electromagnéticas.

Quase ao mesmo tempo, Hertz construiu dispositivos com que emitiu e detectou a chegada de ondas electromagnéticas, que se verificou diferirem das ondas luminosas apenas na frequência e no comprimento de onda. A Óptica veio assim integrar-se no Electromagnetismo. As suas equações tinham carácter ondulatório como Huygens, com a sua intuição, soubera prever.

Mas afinal o que é que vibrava? Os campos matemáticos E e B? Devia haver um *substractum* real. Relançou-se assim a ideia do *Ether* de Huygens, de certo modo já inventado por Descartes, concebido à maneira das coisas mecânicas embora com propriedades muito estranhas.

As ondas electromagnéticas incluindo as luminosas seriam, portanto, vibrações do *Ether*.

3.4 *À procura do «vento de Ether»*

Uma coisa parecia evidente. A velocidade da luz só seria a mesma em todas as direcções no caso de estarmos parados em relação ao *Ether*.

Sendo c a velocidade da luz no referencial do *Ether* e v a nossa velocidade em relação ao *Ether*, a velocidade da luz no nosso referencial devia ter os valores $c - v$ e $c + v$, num e noutro sentido na direcção do deslocamento do *Ether*, e $(c^2 - v^2)^{1/2}$ na direcção ortogonal. Estes valores resultam da transformação de Galileu. A velocidade do *«vento de Ether»* devia ser detectável a partir destas diferenças de velocidade.

Temos a relação algébrica.

$$\frac{1_o}{c-v} + \frac{1_o}{c+v} > \frac{21_o}{(c^2 - v^2)^{1/2}}$$

O primeiro membro é o tempo que um sinal luminoso demora a percorrer um trajecto de ida e volta de comprimento 1_o paralelo ao *«vento de Ether»*. O segundo é a duração no caso do trajecto ter direcção perpendicular.

Para detectar um eventual *«vento de Ether»*, Michelson, em experiências que tiveram grande repercussão na época (1881-87), utilizou um dispositivo em que dois raios de luz vindos de uma mesma fonte interferiam depois de terem percorrido, à ida e à volta, dois trajectos ortogonais. Num écran apareciam as riscas de interferência. As alterações da velocidade da luz nos trajectos provocavam deslocamento das riscas. O conjunto, incluindo a fonte e o écran, estava montado sobre uma base rígida que podia rodar em torno de um eixo vertical. Esperava-se assim pôr em evidência uma eventual anisotropia da velocidade da luz (que deveria provocar um deslocamento das riscas quando o conjunto rodava). Com alguma surpresa não se notou nada, o que só se podia explicar por ser nulo o *«vento de Ether»*.

Admitiu-se o acaso de no referencial do Sol a velocidade da Terra coincidir, naquele momento, com a do *Ether*. Mas seis meses depois, numa altura em que a velocidade da Terra em relação ao *Ether* devia ser o dobro da velocidade de translação, as riscas de novo ficaram imperturbáveis. Todas as experiências pareciam indicar que o «*vento de Ether*» era nulo.

Como explicar este resultado?

Apareceu logo quem dissesse que tendo a Terra uma massa muito grande arrastava o *Ether* com ela. Era uma explicação inventiva mas estéril, que fechava os olhos em vez dos abrir. Tudo ficava explicado (à maneira de Descartes e do ímpeto da Idade Média) e nada havia que mudar. Se não surgissem insatisfeitos como Einstein, andaríamos hoje com satélites à procura do «*vento de Ether*».

3.5 *A não invariância das equações de Maxwell*

As equações da Mecânica, incluindo as da gravitação, são invariantes numa transformação de Galileu (o que era considerado a expressão mesmo da sua concordância com o Princípio da Relatividade).

As equações de Maxwell, porém, não o são (o que não é evidente e exige alguma técnica matemática: há que transformar os operadores diferenciais em conformidade com as mudanças de coordenadas de Galileu e verificar depois que não é possível encontrar uma transformação dos campos E e B que restitua a equação à forma inicial).

Este facto não preocupou muito os físicos, porque, sendo o Electromagnetismo uma vibração do *Ether,* era normal as equações de Maxwell só serem válidas no referencial do *Ether,* que para efeitos do Electromagnetismo, teria assim um papel privilegiado.

Nas equações do Electromagnetismo noutros referenciais deveria aparecer (como de facto aparecia quando se fazia a transformação de Galileu) a velocidade em relação ao *Ether* o que, em termos ópticos, se devia traduzir pela anisotropia da velocidade da luz.

Tudo parecia coerente, só que as experiências não evidenciavam qualquer sinal dessa anisotropia.

Um físico eminente, Lorentz, aceitou como verdadeiros os resultados das experiências de Michelson mas continuou a acreditar no *Ether*.

Como conciliou as duas coisas?

Os comprimentos dos percursos da luz no dispositivo de Michelson eram definidos por barras a que estavam fixos espelhos onde a luz era reflectida. Num texto de 1895, Lorentz admitiu que o comprimento das barras era alterado pelo movimento do *Ether*. Uma barra de comprimento l_o passaria a ter o comprimento $l_o \sqrt{1 - \beta^2}$ quando se deslocasse longitudinalmente em relação ao *Ether* com a velocidade $v = \beta c$. O «*vento de Ether*», mesmo que existisse, não seria detectado na experiência de Michelson porque, ao efeito da anisotropia da velocidade da luz, se sobreporia o efeito da deformação do próprio dispositivo experimental.

Lorentz descobriu, assim, a hoje chamada «contracção de Lorentz», mas dando-lhe uma «explicação» que depois foi totalmente abandonada no quadro da Relatividade. Para ele, havia uma complicada interacção entre o *Ether* e as forças electromagnéticas intermoleculares responsáveis pelo comprimento dos corpos.

Num artigo publicado em 1904, Lorentz prosseguiu nesta ideia. Num referencial diferente do do *Ether* as equações do Electromagnetismo (obtidas pela transformação de Galileu) seriam diferentes das de Maxwell, mas experimentalmente não se notaria a diferença, pelo menos até uma segunda ordem de aproximação, porque os próprios instrumentos de observação seriam perturbados pelo *Ether* em movimento. Lorentz procurou, então, definir novas variáveis relacionadas com o comprimento dos corpos deformados pelo *Ether*, que permitissem eliminar nas equações o efeito da translação. Não conseguiu cumprir inteiramente o projecto mas encontrou quase, não exactamente, as hoje chamadas transformações de Lorentz.

O laborioso trabalho de Lorentz para explicar factos (os resultados negativos das experiências de Michelson), que lhe pareciam estranhos no quadro conceptual a que estava habituado, fechou-lhe os olhos para uma alteração desse quadro que tornasse esses factos naturais e sem necessidade de explicação. O seu trabalho lembra singularmente o esforço de Kepler a inventar complicadas interacções para explicar o facto do alcance da bala do canhão ser o mesmo para Oriente e Ocidente.

Talvez como simples exercício, o grande matemático Poincaré procurou uma transformação de coordenadas que deixasse invariante as equações de Maxwell e encontrou (antes de Einstein) as transformações de Lorentz que são a base da Relatividade Restrita. Mas, aparentemente, não se apercebeu que tinha encontrado as fórmulas que deviam substituir *em toda a Física* as fórmulas de transformação de Galileu. Talvez por ser demasiado matemático e olhar as mudanças de coordenadas todas de igual modo, não as procurou discutir em termos físicos. Não foi ele, por isso, o descobridor da Relatividade.

IV

A RELATIVIDADE RESTRITA

4.1 *A aceitação do Princípio da Invariância da velocidade da luz*

As leis da Mecânica eram as mesmas em todos os referenciais de inércia. Era estranho que o mesmo se não passasse com o Electromagnetismo que parecia tão fundamental como a Mecânica. A introdução da hipótese do *Ether* que conferia um carácter privilegiado a um referencial não podia deixar de ser olhada como uma diminuição e uma entorse ao Princípio da Relatividade. Era, de qualquer modo, estranho que as teorias fundamentais da Física fossem concebidas de um modo tão diferente.

O mérito de Einstein foi o de ter aceite como natural (sem necessidade de explicação) o *facto,* repetidamente indicado pelas experiências e inteiramente concordante com o Princípio da Relatividade, da velocidade da luz ser a mesma em todos os referenciais. Esta aceitação de a velocidade da luz *ser,* e não apenas *aparentar ser,* a mesma, foi a base de partida da Relatividade.

No artigo fundamental «Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em movimento», publicado em 1905, Einstein escreveu:

«As reflexões que se seguem apoiam-se no princípio da Relatividade e no princípio da constância da velocidade da luz, que vamos definir da seguinte maneira:

1. As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

2. Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas «em repouso» com uma velocidade determinada V, que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer seja por um corpo em movimento».

(Neste texto, a expressão *no sistema de coordenadas «em repouso»* significa, na linguagem que temos vindo a usar: *no referencial de inércia adoptado.* Com efeito, na sequência, na aplicação deste princípio, Einstein diz que o valor de V, velocidade da luz, é o mesmo em diferentes sistemas de coordenadas «em repouso», e que numa direcção é o mesmo nos dois sentidos. Ao escolher a forma do enunciado 2, Einstein parece ter considerado que a única dúvida que poderia ainda subsistir era a da velocidade da luz estar relacionada com a velocidade da fonte.)

Einstein baseou a sua teoria nos dois princípios expostos. O primeiro era o Princípio da Relatividade, já antigo. O segundo veio pôr fim a uma situação de excepção, até à data aceite, e inserir-se no primeiro como caso particular. A Relatividade Restrita não é, assim, relativamente à Física Clássica, uma nova concepção do mundo como o foi a concepção galileana relativamente à aristotélica. Mas é um correctivo que, modificando pouco, abriu perspectivas inteiramente novas e caminhos de descoberta extraordinariamente fecundos.

4.2 *A crítica da noção de simultaneidade*

Consideremos uma barra imóvel num referencial de inércia. Que sentido tem dizer que estão acertados dois relógios fixos nas suas extremidades?

Em Física Clássica há dois processos para acertar relógios fixos em dois pontos A e B afastados. Um, é arranjar um caixeiro viajante que se desloque com um relógio no bolso e leve a hora de A para B. Outro, é utilizar um sinal que se propague de A para B e de B para A com igual velocidade: emitido o sinal em A no instante t_{A1} (tempo marcado pelo relógio A), reflectido em B em t_{B2} (tempo marcado pelo relógio B) e regressado a A em t_{A3}, os dois relógios estão acertados se se verificar:

$$\frac{t_{A1} + t_{A3}}{2} = t_{B2}$$

(em caso de diferença podemos fazer o acerto).

Einstein teve a percepção de que em Relatividade o segundo processo seria o bom. Assim, em Relatividade e em particular neste texto, quando se falar em tempo de um referencial de inércia S (ou dum sistema de coordenadas em «repouso» na terminologia inicial de Einstein), deve ser entendido o tempo marcado por relógios fixos nos diferentes pontos do referencial S e acertados pelo processo indicado (diremos abreviadamente relógios de S).

Acontecimentos *simultâneos em S* serão acontecimentos caracterizados por iguais valores do tempo t marcado pelos relógios de S junto a eles localizados.

Comprimento em S de uma barra (eventualmente móvel em S) será a distância entre dois pontos de S em que, *simultaneamente em S*, passem as duas extremidades da barra.

Consideremos agora uma barra $A'B'$, com dois relógios nas suas extremidades, fixa num referencial S', que se move longitudinalmente em relação ao referencial S com a velocidade v (paralela ao eixo dos xx e dirigida no sentido dos x crescentes).

Seja t o tempo de S e r o comprimento da barra em S. Admitamos que no instante $t_1 = 0$ a extremidade A' da barra está no ponto $x_1 = 0$ de S e nela é emitido um sinal luminoso. Este sinal atinge B' no instante t_2 e na posição x_2:

$$t_2 = \frac{r}{c - v}; \quad x_2 = \frac{rv}{c - v} + r = \frac{rc}{c - v}$$

Se o sinal for reflectido em B', volta a A' em:

$$t_3 = \frac{r}{c - v} + \frac{r}{c + v} = \frac{2\,cr}{c^2 - v^2}; \quad x_3 = \frac{2\,crv}{c^2 - v^2}$$

Estes valores em nada diferem dos da Física Clássica (representamos por c a velocidade da luz).

Admitamos que os dois relógios fixos nas extremidades A' e B' da barra (imóveis portanto em S') *estão constantemente acertados pelos relógios de* S *que vão encontrando pelo caminho*. Nos momentos da emissão e recepção do sinal o relógio de A' marcará t_1 e t_3. No momento da reflexão o relógio de B' marcará t_2. Ao constatar:

$$\frac{t_1 + t_3}{2} < t_2$$

os observadores de S' dirão que os relógios colocados nas extremidades da barra não estão acertados, estando o relógio B' avançado.

Os dois relógios de S' acertados pelos relógios de S não estão acertados entre si em S'. *Acontecimentos simultâneos em* S *não são portanto simultâneos em* S'.

A noção de simultaneidade com significado absoluto usada em Física Clássica pressupunha a ideia de que relógios iguais, inicialmente juntos e simultaneamente postos em movimento, se manteriam acertados depois de dispersos pelo espaço (o que se poderia confirmar quando eventualmente se voltassem a encontrar).

A análise crítica de Einstein acima exposta mostra que em Relatividade tal não é verdade. A experiência já foi feita. Dois físicos partiram de um aeroporto em viagens à volta do mundo em sentidos contrários com relógios muito precisos, à partida acertados. À chegada, constataram que o que tinha partido para Oriente tinha o relógio atrasado.

4.3 *A construção das fórmulas de transformação de Lorentz*

Em Física Clássica era aceite como evidente estarem as coordenadas de dois referenciais S e S' em movimento de translação uniforme (e origem dos eixos coincidentes no instante $t=0$) relacionadas pelas fórmulas:

$$t' = t \;\; ; \;\; x' = x - v\,t \;\; ; \;\; y' = y ; \; z' = z,$$

habitualmente designadas por *fórmulas de transformação de Galileu.*

Era assunto sobre o qual não tinham dúvidas nem os grandes físicos nem as crianças das escolas. De facto, ninguém escrevia $t' = t$. Todos usavam um único t, pois nem uns nem outros faziam qualquer distinção entre o tempo do referencial S e o tempo do referencial S'.

O movimento era encarado como uma sucessão de estados de imobilismo. É esta ideia que está subjacente na fórmula «evidente»: $x' = x - vt$. Veremos que, tal como a simultaneidade, também esta ideia é modificada em Relatividade.

Vamos admitir, à partida, que as fórmulas de transformação entre as coordenadas de dois referenciais de inércia são em Relatividade do tipo:

$$x' = k_1\, x + k_2\, t \;\; ; \;\; t' = k_3\, x + k_4\, t,$$

em que os k_1, k_2, k_3, k_4 são constantes só dependentes da velocidade relativa dos dois referenciais. O carácter linear destas fórmulas é conforme a ideia de homogeneidade do espaço — o passar-se tudo de igual modo em todos os lugares — que queremos respeitar.

Designemos por A_1, B_2, A_3 os acontecimentos emissão (em A'), reflexão (em B') e recepção (em A') do sinal luminoso referido na secção anterior, onde foram calculadas as respectivas coordenadas em S.

Quanto às coordenadas em S', temos desde logo: $x'_1 = 0$, $t'_1 = 0$, $x'_3 = 0$. Deste último valor, por meio de contas simples, chegamos à relação: $k_2 = - v\, k_1$. Atendendo a que t' é o tempo de S' e t'_1, t'_2 e t'_3 são os instantes de emissão, reflexão e recepção de um sinal luminoso, temos: $t'_1 + t'_3 = 2\, t'_2$, condição que nos fornece: $c^2 k_3 = - v\, k_4$. Atendendo a que B_2 é o acontecimento chegada a B' do sinal luminoso emitido em A_1, temos $x'_2 = c\, t'_2$, relação que nos fornece $k_1 = k_2$. Fazendo $k_1 = a$, as fórmulas de transformação escrevem-se:

$$x' = a\,(x - vt);\; t' = a\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right),$$

em que só o parâmetro a é ainda desconhecido. Este parâmetro pode depender de v mas não deve depender do seu sentido. Deverá portanto ser: $a(v) = a(-v)$. As fórmulas inversas (da passagem de S' para S) escrevem-se portanto:

$$x = a\,(x' + vt');\; t = a\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right).$$

Aplicando sucessivamente os dois conjuntos de fórmulas, obtemos:

$$x' = a^2\,(x' + vt') - a^2\, v\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right),$$

o que nos permite calcular a e finalmente escrever:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}};\; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1-\beta^2}};\; \beta = \frac{v}{c}$$

e as respectivas fórmulas inversas:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

São estas formulas de transformação de Lorentz que em Relatividade substituem as fórmulas de transformação de Galileu (que delas podem ser obtidas atribuindo a c o valor infinito).

A dedução que apresentamos foi, com ligeiras alterações, a apresentada por Einstein num dos seus textos didácticos.

4.4 *A «contracção dos comprimentos»*

As fórmulas de transformação de Lorentz podem ser escritas sob a forma:

$$x = x' \sqrt{1-\beta^2} + vt; \; t = t' \sqrt{1-\beta^2} + \frac{v}{c^2} x.$$

Consideremos uma barra imóvel em S' paralela ao eixo dos xx e de comprimento $1_o = x_2' - x_1'$. O seu comprimento em S (precisemos: simultaneamente em S) é:

$$1 = x_2 - x_1 = (x_2' - x_1') \sqrt{1-\beta^2} = 1_o \sqrt{1-\beta^2}.$$

O comprimento da barra é pois menor no referencial em que se move longitudinalmente.

Lorentz imaginara uma contracção dada por uma fórmula idêntica para explicar os resultados negativos das experiências de Michelson. Daí o chamar-se a este efeito *«contracção de Lorentz»*. Não temos, porém, que relacioná-la com qualquer efeito do *Ether* em movimento sobre as distâncias intermoleculares. A *«contracção de Lorentz»* resulta pura e simplesmente das fórmulas que relacionam as coordenadas de dois sistemas em movimento, fórmulas estas impostas pelo Princípio da Relatividade nele incluída a constância da velocidade da luz.

Devido à *«contracção de Lorentz»* em Relatividade o movimento deixa de poder ser olhado como uma sucessão de estados de imobilismo. Note-se, ainda, que nos movimentos transversais não há *«contracção de Lorentz»*.

4.5 *A «dilatação do tempo»*

Consideremos dois acontecimentos (x'_1, t'_1) e (x'_2, t'_2) na «vida» de uma partícula material imóvel no referencial S' $(x'_1 = x'_2)$. Estes acontecimentos terão em S as coordenadas t_1 e t_2, sendo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Ao intervalo de tempo $\Delta t_0 = \Delta t'$ da vida da partícula no referencial próprio (tempo próprio) corresponde no referencial em que ela se move um intervalo de tempo maior. É a chamada *«dilatação dos tempos»*. Uma partícula com o tempo de vida média τ_0 no referencial próprio, que se desloque com a velocidade v num referencial, percorre nesse referencial (em média) o percurso $\tau_0 \, v \, \gamma$ e não o percurso $\tau_0 \, v$ como seria de esperar em Física Clássica. O facto é observado em mesões que atravessam a atmosfera.

Um viajante que parta dum ponto A de um referencial de inércia e a ele regresse vive menos tempo do que uma pessoa que tenha ficado imóvel em A. É o caso dos físicos que deram a volta ao mundo referidos na secção 4.2. No caso das viagens terem a duração de 24 horas, o que partiu para Ocidente ficou parado, ou pouco se moveu, no referencial de inércia do centro da Terra. Este efeito é habitualmente designado por «paradoxo dos gémeos».

4.6 *A composição das velocidades*

Sendo v a velocidade de um referencial S' em relação a um referencial S, e V'_x a velocidade de uma particula material em

S' (v e V'_x com a direcção do eixo dos xx), a velocidade dessa partícula em relação a S é dada em Física Clássica por:

$$V_x = V'_x + v$$

Este resultado resulta directamente das fórmulas de transformação de Galileu.

Em Relatividade os cálculos com as fórmulas de transformação de Lorentz dão-nos:

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{V'_x \cdot v}{c^2}}$$

No caso da partícula ter em S' a velocidade V'_y numa direcção ortogonal ao eixo dos xx, a sua velocidade tem em S as duas componentes:

$$V_x = v; \; V_y = V'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Estas fórmulas relativistas da composição das velocidades (que podem ser procuradas a título de exercício) obrigam-nos, como veremos adiante, a alterar as fórmulas clássicas de definição da quantidade de movimento e da energia.

Notemos que, no caso de ser c o módulo da velocidade de uma partícula em S', é igualmente c o módulo da sua velocidade em S (podendo no entanto haver alteração da direcção da sua velocidade em relação aos eixos). Um fotão tem, assim, a mesma velocidade c em todos os referenciais.

4.7 *A Mecânica Relativista*

As equações de Maxwell, invariantes nas transformações de Lorentz, já eram relativistas desde 1870. Se pareciam em choque com o Princípio da Relatividade é porque se usavam as fórmulas de transformação de Galileu, simples aproximações das fórmulas de Lorentz, verdadeiras fórmulas de transformação entre as coordenadas de dois referenciais de inércia.

Com a Mecânica passou-se o contrário. As equações da Mecânica Clássica, invariantes nas transformações de Galileu, deixaram de o ser nas transformações de Lorentz. Para por toda a Física fundamental em concordância com o Princípio da Relatividade, houve pois que construir uma nova Mecânica invariante nestas transformações.

Este programa (com excepção da gravitação) foi realizado por Einstein logo em 1905.

Houve que modificar as fórmulas clássicas de definição da quantidade de movimento e da energia cinética:

$$I = mv \ ; \ E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Consideremos o caso do choque elástico de duas partículas de massas iguais que se dirigem uma para a outra com velocidades iguais no referencial S (referencial do seu centro de massa).

Em Relatividade, como em Física Clássica, devemos admitir que depois do choque as duas partículas se afastam em sentidos opostos com velocidades em módulo iguais às velocidades iniciais.

Consideremos o caso particular das velocidades após o choque terem direcções perpendiculares às iniciais. As fórmulas de composição das velocidades permitem-nos determinar as velocidades noutros referenciais, por exemplo, no referencial S' em que a primeira partícula está inicialmente imóvel.

Os princípios fundamentais da conservação da quantidade de movimento e da energia têm de ser respeitados em todos os referenciais de inércia.

Fazendo os cálculos (simples mas algo longos) relativos ao exemplo considerado, e usando as fórmulas de definição clássicas, encontramos que em S' a quantidade de movimento e a energia cinética do sistema das duas partículas são diferentes antes e depois do choque.

Houve que modificar as fórmulas clássicas. As boas fórmulas relativistas, conciliáveis com as fórmulas de composição das velocidades e a conservação da quantidade de movimento e da energia cinética nos choques elásticos, são:

$$I = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

São estas as fórmulas que utilizaremos na sequência. Nelas representamos por m_0 a massa da partícula no referencial próprio, ou, mais exactamente, no referencial de inércia do seu centro de massa (uma «partícula» pode ser uma coisa muito grande, um planeta, um sistema solar, ou mesmo uma galáxia).

4.8 *A equiparação massa-energia*

Estudemos agora o problema dos choques não elásticos.

Admitamos que as duas partículas atrás referidas em vez de se afastarem após o choque se aglutinam formando uma nova partícula. Deixa de haver conservação da energia cinética, o que nada nos admira porque o choque deixou de ser elástico.

Em Física Clássica, num domínio que já não é da pura Mecânica mas da Termodinâmica, dizemos que a energia interna das partículas aumenta de um quantitativo igual à diminuição da energia cinética. Quanto à massa, dispensamo-nos de dizer que a massa final é igual à massa inicial, porque tal nos parece evidente. Resulta de um princípio da conservação da massa implícito em toda a Física Clássica.

Encaremos o problema em Relatividade do ponto de vista do referencial S', referencial inicial da primeira partícula.

Neste referencial antes do choque as duas partículas têm as velocidades:

$$v_1' = 0 \; ; \; v_2' = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Depois do choque a velocidade da partícula conjunta é:

$$v'_f = -v.$$

Se calcularmos a quantidade de movimento do sistema em S' usando a definição relativista atrás adoptada e admitindo que a massa própria da partícula final é a soma das massas próprias m_o das duas partículas iniciais ($m_{of} = 2\ m_o$) encontramos, antes e depois do choque, os valores diferentes:

$$I'_{\text{antes}} = 2\ m_o\gamma^2 v;\ I'_{\text{depois}} = m_{of}\,\gamma v = 2\ m_o\gamma v.$$

Há algo que não está certo. O que é que podemos modificar?

A fórmula relativista da quantidade de movimento foi-nos imposta pelos estudos dos choques elásticos. Resta-nos pôr em causa a conservação da massa própria.

Até agora temos admitido que no caso de sistemas de partículas que se aglutinem e fraccionem se verifica:

$$(\Sigma m_{of})\ \text{depois} = (\Sigma m_{oi})\ \text{antes.}$$

Em sua substituição consideremos a fórmula:

$$\left(\Sigma \frac{m_{of}}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}}\right) \text{depois} = \left(\Sigma \frac{m_{oi}}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}\right) \text{antes}$$

em que os m_{of} e m_{oi} *são as massas próprias das partículas antes e depois do choque (ou do período de interacção) e* v_f e v_i as velocidades finais e iniciais no referencial de inércia adoptado.

Esta fórmula vai permitir acertar tudo. Em primeiro lugar é invariante relativista, o que significa que sendo verdadeira num referencial de inércia o é também em qualquer outro. Em seguida vai fazer respeitar a conservação da quantidade de movimento, tanto nos choques elásticos como nos não elásticos. No caso considerado da aglutinação das partículas iguais, por exemplo, obtemos:

$$m_{of} = 2\ m_o\gamma;\ I'_{\text{depois}} = 2\ m_o\gamma^2 v = I'_{\text{antes}}.$$

A conservação da quantidade de movimento passou a ser respeitada. Este resultado é geral quando usamos a fórmula apresentada que passamos, portanto, a adoptar. Podemos passar a dizer que choques elásticos são aqueles em que há conservação das massas próprias.

Como interpretar o aparecimento de massa própria nos choques não elásticos?

Notemos que no exemplo apresentado temos:

$$m_{of} = 2\ m_{oi} + 2\ m_{oi}\ (\gamma - 1).$$

O aumento de massa própria é igual à diminuição de energia cinética no referencial do centro de massa dividida por c^2.

No caso geral podemos escrever:

$$E_T = \Sigma\ \frac{m_{of}\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_f^2}{c^2}}} = \Sigma \frac{m_{oi}\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i}{c^2}}} = m_T\,c^2,$$

e ter a audácia de considerar estes somatórios como a energia total do sistema que se mantém, assim, tanto nos choques elásticos como nos não elásticos.

Para cada partícula temos:

$$E = m\,c^2 = \frac{m_o\ c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathrm{m}_o\,c^2 + m_o\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$\simeq m_o\,c^2 + \frac{m_o\,v^2}{2} + \ldots$$

A energia de cada partícula aparece-nos dada pela soma do termo da energia cinética relativista mais um termo igual à massa própria multiplicada por c^2.

Passamos a ter em Relatividade um princípio geral da conservação da energia, ou da massa-energia, entendendo por energia o produto da massa por c^2. Quando aumentamos a energia de um sistema, seja por acréscimo da sua energia interna (energia no referencial próprio) seja por aumento da energia cinética, a massa aumenta de um quantitativo igual ao aumento de energia dividido por c^2.

A expressão equiparação massa-energia refere-se a este resultado, apresentado por Einstein num segundo artigo: «A inércia de um corpo será dependente do seu conteúdo energético?» publicado em 1905. Sabia-se que a massa dos núcleos dos átomos pesados era maior do que a das suas componentes. A fórmula $E = mc^2$ permitiu a Einstein, logo em 1905, afimar que na cisão desses átomos se libertaria uma energia igual ao excesso de massa multiplicado por c^2.

4.9 *O espaço-tempo de Minkowski*

A expressão espaço-tempo foi introduzida por Minkowski no âmbito já da Relatividade num artigo publicado em 1907. Minkowski notou que representando por $(\Delta t, \Delta x)$ o intervalo entre dois acontecimentos em coordenadas dum referencial S, e por $(\Delta t', \Delta x')$ o intervalo entre os mesmos acontecimentos em coordenadas de um outro referencial S', as fórmulas de transformação de Lorentz permitiam escrever:

$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = (\Delta x')^2 - c^2 (\Delta t')^2$$

ou, na linguagem inicial de Minkowski:

$$\Delta x^2 + (\Delta x^4)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta x^{4'})^2$$
$$\text{com } \Delta x^4 = i\, c\, \Delta t; \ \Delta x^{4'} = i\, c\, \Delta t'$$

Isto significa que podemos falar em distâncias entre dois acontecimentos, sendo essa distância dada pela fórmula invariante (usamos agora a linguagem diferencial):

$$ds^2 = dx^2 + (dx^4)^2 = dx^2 + (ic\ dt)^2 = dx^2 - c^2dt^2$$

Poder falar em distâncias significa atribuir propriedades métricas a um espaço. Minkowski descobriu, assim, as propriedades métricas do espaço-tempo, noção, como dissemos, já implicitamente considerada em Física Clássica.

O espaço-tempo, de entidade um pouco fantasmagórica do início, tem vindo a ganhar, aos poucos, o papel de entidade central da Física.

Desde o início teve um papel unificador. Em Física Clássica, o espaço-tempo aparecia como um produto $\mathcal{E}_3 \times R$, de um espaço métrico a três dimensões (o espaço de um qualquer referencial de inércia) por um espaço métrico a uma dimensão (o tempo). Em Relatividade, o espaço-tempo é um $\mathcal{E}_4$.

Em Física Clássica, os campos vectoriais e tensoriais têm três dimensões. Em Relatividade, os campos devem ter quatro dimensões. Os físicos rapidamente aprenderam a agregar as entidades de que dispunham para fabricar estes elementos quadridimensionais, que lhes permitem falar uma linguagem invariante, isto é, independente do sistema de representação adoptado. Surgiram, assim, nos livros de Física, elementos quadrimensionais como o quadrivector impulsão-energia, o tensor electromagnético, e o tensor impulsão-energia que viria a ter um papel importantíssimo na sequência.

Os físicos aprenderam, igualmente, a falar em trajectórias do espaço-tempo (que não são trajectórias de movimentos, mas os próprios movimentos), a distinguir as possíveis para as partículas materiais das impossíveis, e a falar dos cones de luz que as separam.

Ultrapassadas as exposições elementares, a expressão da métrica pseudo-euclideana do espaço-tempo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

$$\text{ou } ds^2 = dr^2 + r^2\, (d\theta^2 + cos^2\, d\varphi^2) - c^2\, dt^2$$

transformou-se na imagem de marca dos livros de Relatividade Restrita. Na sequência, «bastou» modificar esta métrica plana para se encontrar a Relatividade Generalizada.

Ao nível da linguagem corrente, a noção de espaço-tempo permite precisar o significado de dois verbos. Uma mesa está numa sala. Existe no espaço-tempo. De certo modo, o espaço-tempo é o elemento de viragem de uma Física do estar (com movimento mas sempre referidos a imagens estáticas) para uma Física do existir.

V

A RELATIVIDADE GENERALIZADA

5.1 *Uma excepção e um problema nos céus*

A Gravitação de Newton ficou a ser a única teoria física fundamental não relativista. Vários físicos se empenharam na tarefa de a tentar modificar para a conciliar com o Princípio da Relatividade dos referenciais de inércia e das fórmulas de transformação de Lorentz, mas os resultados não foram convincentes. O haver ainda hoje quem trabalhe no assunto é indício de que nada de muito bom foi encontrado.

Os físicos trabalham com tensores um pouco como as senhoras a fazer *crochet*. Tendo de respeitar regras rígidas mas com algumas margens de escolha, têm de acertar todo um conjunto de coisas. Se o conseguem, o edifício é apreciado na sua globalidade.

Houve um fio condutor de ideias físicas que a ele conduziu? Ganha uma nova simplicidade em relação a situações anteriores? Explica algo que era incompreensível? Prevê novos efeitos verificáveis experimentalmente? Tem algo que o imponha, ou aparece simplesmente como mais uma construção entre outras?

As teorias da Gravitação no âmbito da Relatividade Restrita não se afirmaram em nenhum destes testes. A Gravitação parecia rebelde ou, pelo menos, à margem da Relatividade.

Mas a própria teoria de Newton revelara no final do século uma primeira falha. Ao medir o avanço do periélio de Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol, os astrónomos tinham encontrado um valor que não sabiam explicar através dos cálculos. Fora um primeiro sinal a pedir a correcção da teoria.

5.2 *O espaço-tempo curvo*

No caso de estarmos num elevador e se romperem os cabos, qual é o verdadeiro referencial de inércia? O referencial do solo onde sentimos a gravitação, ou o referencial do elevador em queda livre em que nada sentimos (salvo o susto) por a força da inércia $f_i = -ma_t = -mg$ se sobrepor ao peso $p = Mg$ e o anular?

Einstein voltou a reflectir no velho problema dos corpos caírem todos do mesmo modo (ou seja, na proporcionalidade entre a massa gravitacional e a massa inercial) e na «equivalência» entre as forças gravitacionais e as forças de inércia.

Na cabine de um foguetão acelerado no espaço livre (sem gravitação) a força de inércia não é equivalente a uma força gravitacional?

Localmente, parece bem que sim, mas não é fácil imaginar no espaço livre um referencial em que as forças de inércia reproduzam a gravitação de um centro atractivo.

Como aparece então a gravitação que localmente se não distingue das forças de inércia?

Entre o Einstein de 1905 que descobriu a Relatividade Restrita e o Einstein de 1911 que tenta estudar a Gravitação, há o espaço-tempo de Minkowski. Einstein apercebeu-se que a teoria da Gravitação teria de ser formulada em termos de espaço-tempo. Nas regiões sem gravitação o espaço-tempo era o espaço plano de Minkowski. Nas regiões com gravitação teria de ser curvo. Na ausência de forças adicionais, os movimentos dos corpos são geodésicas desse espaço curvo, tal como são rectas no espaço plano. Por isso todos caem do mesmo modo. O projecto da nova teoria tinha de ser o de incluir os efeitos gravitacionais na geometria do espaço-tempo.

5.3 *As equações e uma solução*

O carácter não plano do espaço-tempo devia estar relacionado com existência de matéria. Como encontrar as equações que relacionassem uma coisa com outra?

Na sequência dos trabalhos de Gauss sobre superfícies curvas, Riemann estudara espaços curvos de mais de duas dimensões. Einstein foi estudar os trabalhos de Riemann.

Por um outro lado, em Relatividade Restrita, era feito um largo uso dum tensor habitualmente representado por $T^{\alpha\beta}$, o chamado tensor impulsão-energia, já atrás brevemente referido, cujas componentes descrevem as tensões e as densidades de massa e de quantidade de movimento de um meio material. As leis fundamentais da conservação da quantidade de movimento e da massa-energia traduzem-se pelo facto da divergência (noção matemática relativamente avançada) deste tensor ser nula.

Einstein teve a percepção de que este tensor devia ter um papel central. Admitindo que o espaço-tempo era um espaço de Riemann, procurou então um tensor relacionado com a geometria destes espaços com divergência nula. Tendo encontrado um tensor nestas condições, habitualmente designado por $S^{\alpha\beta}$, teve a audácia em 1915 de escrever:

$$S^{\alpha\beta} = \chi T^{\alpha\beta} \; ; \left(\chi = \frac{8\pi G}{c^4}\right).$$

São estas as equações da Relatividade Generalizada. (A constante χ foi relacionada com G por meio do estudo de um caso particular).

Logo em 1916, Schwarzschild descobriu a solução destas equações correspondente ao caso particularmente simples dum espaço sem matéria ($T^{\alpha\beta} = O$) mas com uma singularidade pontual onde pode ser suposta concentrada uma grande massa M. Esta solução escreve-se (com $m = MGc^{-2}$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - r^2 \left(d\theta^2 + cos^2 \theta \, d\varphi^2\right) + c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2.$$

As equações da Relatividade Generalizada (equações não lineares às derivadas parciais) são tão complicadas, que, durante quase meio século, além de algumas variantes da solução de Schwarzschild, não se lhe descobriu nenhuma outra.

5.4 *As verificações experimentais*

A solução de Schwarzschild permitiu algumas confirmações experimentais. A primeira foi a do cálculo do avanço do periélio dos planetas. Na nova teoria os planetas descrevem geodésicas de um espaço-tempo curvo deformado pelo Sol, descrito pela solução de Schwarzschild. Feitos os cálculos, encontraram-se para Mercúrio e Vénus valores que condiziam com os valores observados.

Uma outra confirmação foi a do desvio de um raio luminoso vindo de uma estrela pelo campo gravítico do Sol. Para um raio que rasasse o bordo do Sol a nova teoria previa um desvio de 1,74″, duplo do previsto pela teoria de Newton. A observação, que podia servir de teste entre as duas teorias, podia ser feita durante o eclipse do Sol que se ia verificar no dia 29 de Maio de 1919. Pela primeira vez, criou-se uma expectativa mundial em que o grande público esteve suspenso do resultado de uma observação com interesse crucial para a Ciência. Duas expedições que observaram os desvios de várias estrelas, no Sobral e na ilha do Príncipe, obtiveram os valores médios (reduzidos ao bordo do Sol) de 1,98″ e 1,60″.

Conta-se que, quando deram a Einstein a notícia destas confirmações, ele se limitou a dizer: «Já sabia».

Novas observações feitas na Austrália, em 1923, deram o valor de 1,74″ em concordância plena com a teoria. (Os valores numéricos citados são transcritos das notas do curso do professor Santos Lucas na Faculdade de Ciências de Lisboa do ano lectivo de 1922-23).

No caso de uma partícula imóvel num ponto $r > 2m$ da métrica de Schwarzschild, o intervalo de tempo próprio correspondente a Δt é:

$$\Delta t_p = \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} \Delta t.$$

Este Δt_p *é o tempo efectivamente «vivido» pela partícula (vivido no sentido literal do termo no caso de um ser vivo) no intervalo* Δt.

As vibrações luminosas emitidas por um átomo colocado em r_1 no intervalo Δt_{p1} são recebidas em $r_2 > r_1$ num intervalo Δt_{p2} maior, com uma frequência portanto mais baixa, ou seja, maior comprimento de onda. É o chamado «desvio para o vermelho». (No espectro luminoso o vermelho está do lado dos maiores comprimentos de onda).

Tinha-se notado na luz vinda das estrelas desvios dos espectros para o vermelho. A Relatividade Generalizada explicou assim o facto. (Da região $r < 2m$ nada pode sair, nem a luz. Os «buracos negros» de que tanto agora se fala são, talvez, estrelas cuja massa tenha entrado para dentro de $r = 2m$).

Em termos experimentais, já foi possível detectar o diferente «escoar» do tempo às diferentes altitudes à superfície da Terra. A nossa cabeça vive assim mais tempo do que os nossos pés. É um efeito de Relatividade Generalizada, devido a estar habitualmente mais alta, que se vem somar ao efeito de Relatividade Restrita dos pés viverem menos por mexerem mais.

A Relatividade Generalizada é hoje uma teoria clássica. Depois do grande surto inicial viveu meio século numa quase sonolência. As tentativas de criação de uma Teoria Unitária que permitisse incluir o campo electromagnético na geometria do espaço-tempo, em que Einstein empenhou metade da vida, não resultaram. Gerações de físicos novos, treinados nos métodos «incompreensíveis» mas fabulosamente fecundos da Física Quântica, permitiram-se ignorá-la.

Hoje, sob o impacto sobretudo da Astrofísica, está a voltar ao centro das atenções. Todos sentem que a História do Universo é, simultaneamente, relativista e quântica. A nova geração de relativistas é de formação de base quântica. Diante deles, a imagem de Einstein é a de um velho físico que teimava em compreender.

Imagem só do passado, ou também do futuro?

ÍNDICE

I — *A Concepção aristotélica*

II — *A concepção galileana*

III — *A Óptica e o Ether*

IV — *A Relatividade Restrita*

V — *A Relatividade Generalizada*

COLECÇÃO ESSENCIAL

1. *Irene Lisboa*
   por Paula Morão
2. *Antero de Quental*
   por Ana Maria A. Martins
3. *A Formação da Nacionalidade*
   por José Mattoso (2.ª edição)
4. *A Condição Feminina*
   por Maria Antónia Palla
5. *A Cultura Medieval Portuguesa (Séculos XI a XIV)*
   por José Mattoso
6. *Os Elementos Fundamentais da Cultura Portuguesa*
   por Jorge Dias
7. *Josefa d'Óbidos*
   por Vitor Serrão
8. *Mário de Sá-Carneiro*
   por Clara Rocha
9. *Fernando Pessoa*
   por Maria José de Lancastre
10. *Gil Vicente*
    por Stephen Reckert
11. *O Corso e a Pirataria*
    por Ana Maria Pereira Ferreira
12. *Os «Bebés-Proveta»*
    por Clara Pinto Correia
13. *Carolina Michaëlis de Vasconcelos*
    por Maria Assunção Pinto Correia
14. *O Cancro*
    por José Conde
15. *A Constituição Portuguesa*
    por Jorge Miranda
16. *O Coração*
    por Fernando Pádua
17. *Cesário Verde*
    por Joel Serrão
18. *Alceu e Safo*
    por Albano Martins
19. *O Romanceiro Tradicional*
    por João David Pinto-Correia
20. *O Tratado de Windsor*
    por Luís Adão da Fonseca
21. *Os Doze de Inglaterra*
    por Artur de Magalhães Basto
22. *Vitorino Nemésio*
    por David Mourão-Ferreira
23. *O Litoral Português*
    por Ilídio Alves de Araújo

24. *Os Provérbios Medievais Portugueses*
por José Mattoso
25. *A Arquitectura Barroca em Portugal*
por Paulo Varela Gomes
26. *Eugénio de Andrade*
por Luís Miguel Nava
27. *Nuno Gonçalves*
por Dagoberto Markl
28. *Metafísica*
por António Marques
29. *Cristóvão Colombo e os Portugueses*
por A. Teixeira da Mota
30. *Jorge de Sena*
por Jorge Fazenda Lourenço
31. *Bartolomeu Dias*
por Luís Adão da Fonseca
32. *Jaime Cortesão*
por José Manuel Garcia
33. *José Saramago*
por Maria Alzira Seixo
34. *André Falcão de Resende*
por Américo da Costa Ramalho
35. *Drogas e Drogados*
por Aureliano da Fonseca
36. *Portugal e a Origem da Liberdade dos Mares*
por Ana Maria Pereira Ferreira
37. *A Teoria da Relatividade*
por António Brotas

Composto e impresso
para
Imprensa Nacional-Casa da Moeda
nas suas Oficinas Gráficas
com uma tiragem de dez mil exemplares.
Concepção gráfica do Gabinete Editorial da INCM.
Acabou de imprimir-se
em Maio de mil novecentos e oitenta e oito.

CÓD. 213038000
ED. 12.610.467

DEP. LEGAL 20 208/88

IMPRENSA NACIONAL-CASA DA MOEDA

37